Correction contrôle de mathématiques

Du mardi 11 octobre 2016

EXERCICE 1

ROC **(1 points)**

Voir cours

EXERCICE 2

Récurrence **(4 points)**

1) a) $\forall n \in \mathbb{N},\quad 1 \leqslant u_n \leqslant 2$.

Initialisation : $u_0 = 2$ donc $1 \leqslant u_0 \leqslant 2$. La proposition est initialisée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $1 \leqslant u_n \leqslant 2$, montrons que $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.

Par hypothèse : $1 \leqslant u_n \leqslant 2 \quad\Leftrightarrow\quad 2 \leqslant u_n + 1 \leqslant 3 \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{1}{1+u_n} \leqslant \dfrac{1}{2} \quad\Leftrightarrow$

$\dfrac{4}{3} \leqslant 1 + \dfrac{1}{1+u_n} \leqslant \dfrac{3}{2} \quad\Leftrightarrow\quad 1 \leqslant \dfrac{4}{3} \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{3}{2} \leqslant 2.$

La proposition est héréditaire.

Conclusion : Par initialisation et hérédité $\forall n \in \mathbb{N},\quad 1 \leqslant u_n \leqslant 2$.

b) Si la suite u_n converge vers ℓ, on ne peut rien dire quant à sa valeur. On peut simplement dire que $1 \leqslant \ell \leqslant 2$

2) $\ell = f(\ell) \quad\Leftrightarrow\quad \ell = 1 + \dfrac{1}{1+\ell} \quad\Leftrightarrow\quad \ell(1+\ell) = 1 + \ell + 1 \quad\Leftrightarrow\quad \ell + \ell^2 = 2 + \ell \quad\Leftrightarrow$

$\ell^2 = 2 \quad\Leftrightarrow\quad \ell_1 = \sqrt{2}$ ou $\ell_2 = -\sqrt{2}$.

Comme $1 \leqslant \ell \leqslant 2$, on en déduit que $\ell = \sqrt{2}$

EXERCICE 3

Limites de suites **(4 points)**

a) $u_n = \dfrac{n^2+2}{n+1} = \dfrac{n\left(n + \dfrac{2}{n}\right)}{n\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)} = \dfrac{n + \dfrac{2}{n}}{1 + \dfrac{1}{n}}$ avec $n \neq 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} n + \dfrac{2}{n} = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{n} = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Par quotient} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty\end{array}$$

b) Par le théorème des gendarmes.

$$-1 \leqslant \cos n \leqslant 1 \overset{n+1>0}{\Leftrightarrow} \frac{-1}{n+1} \leqslant \frac{\cos n}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1} \overset{+3}{\Leftrightarrow} 3 - \frac{1}{n+1} \leqslant 3 + \frac{\cos n}{n+1} \leqslant 3 + \frac{1}{n+1} \quad\Leftrightarrow$$

on obtient l'encadrement $3 - \dfrac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3 + \dfrac{1}{n+1}$

$$\lim_{n\to+\infty} 3-\frac{1}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} 3+\frac{1}{n+3} = 3, \text{ d'après le théorème des gendarmes } \lim_{n\to+\infty} u_n = 3$$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n-1 = +\infty$

$$\frac{n+3}{1-2n} = \frac{n\left(1+\frac{3}{n}\right)}{n\left(\frac{1}{n}-2\right)} = \frac{1+\frac{3}{n}}{\frac{1}{n}-2} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} 1+\frac{3}{n} = 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}-2 = -2 \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{Par quotient} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+\frac{3}{n}}{\frac{1}{n}-2} = -\dfrac{1}{2}\end{array}$$

Par différence $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < 1$

Par somme et produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\frac{2}{3}$

Exercice 4

Somme de termes **(4 points)**

a) $u_1 = \dfrac{1}{1+\sqrt{1}} = \dfrac{1}{2} = 0,5$

$$u_2 = \frac{1}{2+\sqrt{1}} + \frac{1}{2+\sqrt{2}} = \frac{8-3\sqrt{2}}{6} \approx 0,626$$

$$u_3 = \frac{1}{3+\sqrt{1}} + \frac{1}{3+\sqrt{2}} + \frac{1}{3+\sqrt{3}} \approx 0,688$$

b) On peut conjecturer que la suite (u_n) est croissante et convergente vers 1

Variables : N, I entiers U réel
Entrées et initialisation
  Lire N
  $0 \to U$
Traitement
  pour I de 1 à N **faire**
    $U + \dfrac{1}{N+\sqrt{I}} \to U$
  fin
Sorties : Afficher U

c) $1 \leqslant i \leqslant n \overset{\sqrt{}}{\Leftrightarrow} 1 \leqslant \sqrt{i} \leqslant \sqrt{n} \overset{+n}{\Leftrightarrow} 1+n \leqslant n+\sqrt{i} \leqslant n+\sqrt{n}$

on prend l'inverse $\dfrac{1}{n+\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{1}{n+\sqrt{i}} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$

d) Par somme des n termes de u_n :

$$\frac{n}{n+\sqrt{n}} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{i}} \leqslant \frac{n}{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n}{n+\sqrt{n}} \leqslant u_n \leqslant \frac{n}{n+1}$$

$$\frac{n}{n+\sqrt{n}} = \frac{n}{n\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}=1$ par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}}=1$

$\dfrac{n}{n+1}=\dfrac{n}{n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}}.$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{1}{n}=1$ par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}}=1.$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1$

Exercice 5

Étude d'une suite **(5 points)**

1) $u_1=\dfrac{1}{2}u_0+2\times 0-1=\dfrac{1}{2}-1=-\dfrac{1}{2}$

$u_2=\dfrac{1}{2}u_1+2\times 1-1=-\dfrac{1}{4}+1=\dfrac{3}{4}$

$u_3=\dfrac{1}{2}u_2+2\times 2-1=\dfrac{3}{8}+3=\dfrac{27}{8}.$

2) a) $v_{n+1}=u_{n+1}-4(n+1)+10=\dfrac{1}{2}u_n+2n-1-4n-4+10=\dfrac{1}{2}u_n-2n+5$

$=\dfrac{1}{2}(u_n-4n+10)=\dfrac{1}{2}v_n$

$\forall n\in\mathbb{N},\ \dfrac{v_{n+1}}{v_n}=\dfrac{1}{2}$, la suite (v_n) est géométrique de raison $q=\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0=u_0+10=11$

b) $v_n=v_0\,q^n=11\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$ d'où $u_n=v_n+4n-10=11\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+4n-10$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=0$ car $-1<\dfrac{1}{2}<1$ et

$\lim\limits_{n\to+\infty} 4n-10=+\infty$, par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$

3) $S_n=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n=(v_0-10)+(v_1+4\times1-10)+(v_2+4\times2-10)+\cdots+(v_n+4n-10)$

$=(v_0+v_1+v_2+\cdots+v_n)+4(1+2+\cdots+n)-10(n+1)$

$=v_0\times\dfrac{1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{1-\dfrac{1}{2}}+\dfrac{4n(n+1)}{2}-10(n+1)=11\times\dfrac{1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{\dfrac{1}{2}}+2n(n+1)-10(n+1)$

$=22\left[1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right]+(n+1)(2n-10)$

Exercice 6

Vrai-Faux **(2 points)**

a) **Affirmation 1 : fausse**.

La suite (u_n) est croissante et majorée par 100, donc d'après le théorème des suites monotones, la suite (u_n) est convergente vers ℓ avec $\ell \leqslant 100$.

b) **Affirmation 2 : vraie**

La suite (v_n) est décroissante et il devient impossible de calculer le terme suivant à partir d'un certain rang :

On peut calculer les premiers termes avec le programme suivant :

```
Variables : N, I entiers  U réel
Entrées et initialisation
    Lire N
    1 024 → U
Traitement
    pour I de 1 à N faire
        √U − 1 → U
    fin
Sorties : Afficher U
```

On trouve alors les premiers termes suivants :

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	1 024	31	4,568	1,1372	0,066	– 0,742	non défini

Seuls les termes jusqu'à u_5 sont définis.