Correction devoir du 03 novembre 2016

Exercice I

Étude d'une fonction **(10 points)**

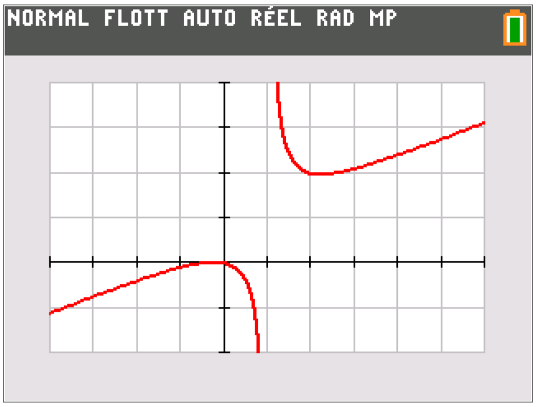
1) a) On obtient sur la calculatrice la courbe suivante.

On peut conjecturer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



b) • Limites en l'infini : $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x - 2} \overset{\div x}{=} \dfrac{x + 1}{1 - \dfrac{2}{x}}$ avec $x \neq 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} x + 1 = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} 1 - \dfrac{2}{x} = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Par quotient} \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \end{array} \quad \text{et} \quad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} x + 1 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \dfrac{2}{x} = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Par quotient} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \end{array}$$

• Limites en 2 :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2} x^2 + x = 6 \\ \lim\limits_{x \to 2^-} x - 2 = 0^- \\ \lim\limits_{x \to 2^+} x - 2 = 0^+ \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Par quotient} \\ \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \end{array}$$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$x - 2$		$-$	0	$+$	

2) a) $f'(x) = \dfrac{(2x+1)(x-2) - (x^2 + x)}{(x-2)^2} = \dfrac{2x^2 - 4x + x - 2 - x^2 - x}{(x-2)^2} = \dfrac{x^2 - 4x - 2}{(x-2)^2}$

b) $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4x - 2 = 0, \quad \Delta = 16 + 8 = 24 = (2\sqrt{6})^2 > 0$

$$x_1 = \frac{4 + 2\sqrt{6}}{2} = 2 + \sqrt{6} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{4 - 2\sqrt{6}}{2} = 2 - \sqrt{6}$$

Signe de $f'(x)$ = signe de $(x^2 - 4x + 2)$.

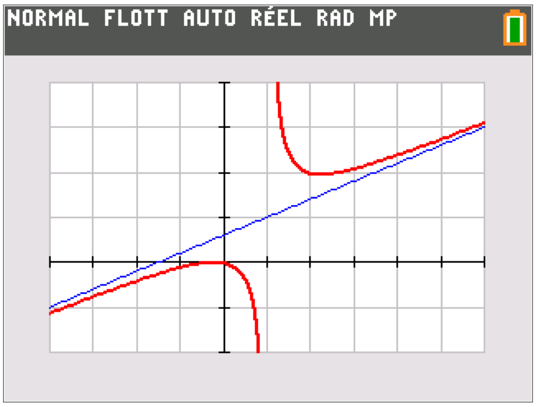
c) On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$2 - \sqrt{6}$		2		$2 + \sqrt{6}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	≈ 0.10	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	≈ 9.90	$\nearrow$	$+\infty$

3) a) $x+3+\dfrac{6}{x-2}=\dfrac{(x+3)(x-2)+6}{x-2}=\dfrac{x^2-2x+3x-6+6}{x-2}=\dfrac{x^2+x}{x-2}=f(x)$

b) On peut conjecturer que la droite d est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ et $-\infty$.

En effet la courbe $\mathscr{C}_f$ se rapproche de plus en plus de la droite d, lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.



c) $f(x)-(x+3)=\dfrac{6}{x-2}$. Cela représente la distance entre la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite d

$\lim\limits_{x\to+\infty} x-2=+\infty$ par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6}{x-2}=0^+$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} x-2=-\infty$ par quotient $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6}{x-2}=0^-$.

La distance entre la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite tend effectivement vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$. On peut aussi préciser que la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus le d en $+\infty$ et en dessous en $-\infty$

4) a) L'équation de la tangente (T) à $\mathscr{C}_f$ en 1 a pour expression :

$(T)\ :\ y=f'(1)(x-1)+f(1)$ on a : $f'(1)=-5$ et $f(1)=-2$.

$(T)\ :\ y=-5(x-1)-2 \Leftrightarrow y=-5x+3$.

b) Il faut résoudre : $f'(x)=-1$.

$\dfrac{x^2-4x-2}{(x-2)^2}=-1 \Leftrightarrow x^2-4x-2=-(x-2)^2 \Leftrightarrow x^2-4x-2=-x^2+4x-4 \Leftrightarrow$

$2x^2-8x+2=0 \overset{\div 2}{\Leftrightarrow} x^2-4x+1=0,\quad \Delta=16-4=12=(2\sqrt{3})^2$

$$x_1=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3} \quad\text{ou}\quad x_2=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}$$

Il existe deux tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ parallèle à la droite d'équation $y=-x+2$ en x_1 et x_2.

Exercice II

Calcul de dérivées **(6 points)**

1) a) La fonction f est dérivable sur son ensemble de définition. Comme $(1+x^2)$ ne s'annule pas, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) $f'(x)=\dfrac{1(x^2+1)-2x(x+1)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}$.

c) $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 - 2x + 1 = 0, \quad \Delta = 4 + 4 = 8 = (2\sqrt{2})^2.$

$$x_1 = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{-2} = -1 - \sqrt{2} \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{-1} = -1 + \sqrt{2}$$

Comme le coefficient quadratique $a = -1 < 0$, le signe de $f'(x)$ est négatif à l'extérieur des racines, la fonction f est alors décroissante, et positif à l'intérieur, la fonction f est alors croissante.

On peut dresser le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\frac{1-\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1+\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	0

2) a) La fonction f est dérivable si $x > 0$, donc sur $]0\,;+\infty[$

b) $$f'(x) = \frac{\sqrt{x} - \dfrac{x+1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2x - x - 1}{2x\sqrt{2}} = \frac{x-1}{2x\sqrt{x}}.$$

c) $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1.$

Le signe de $f'(x)$ est égal au signe de $(x-1)$ sur $]0\,;+\infty[$. Sur $]0\,;\,1[$, f' est négative, la fonction f est alors décroissante, et sur $]1\,;+\infty[$, f' est positive, la fonction f est alors croissante.

On peut dresser le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

EXERCICE III

Continuité **(2 points)**

On change la forme de f avant de passer à la limite en utilisant l'expression conjuguée.

$$f(x) = \frac{\sqrt{3+x} - 2}{x-1} = \frac{(\sqrt{3+x} - 2)(\sqrt{3+x} + 2)}{(x-1)(\sqrt{3+x} + 2)} = \frac{3 + x - 4}{(x-1)(\sqrt{3+x} + 2)} = \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{3+x} + 2)}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3+x} + 2}$$

$\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{3+x} + 2 = 4, \quad$ par quotient $\quad \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{\sqrt{3+x} + 2} = \dfrac{1}{4} = f(1).$

La fonction f est donc continue en 1.

Exercice IV

Limites **(2 points)**

1) **Proposition 1 : Vraie**

$\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \dfrac{2}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \dfrac{3}{x} = 1.$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

2) **Proposition 2 : fausse**

Il faut prendre un contre-exemple bien choisi pour montrer que f ne peut avoir de limite en $+\infty$. Cela peut être un exemple graphique. On va introduire une fonction sinus qui n'a pas de limite en $+\infty$.

Soit $f(x) = \dfrac{3}{2} + \dfrac{\sin x}{2} + \dfrac{1}{x}$. Montrons l'encadrement :

$$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2} \leqslant \frac{\sin x}{2} \leqslant \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leqslant \frac{3}{2} + \frac{\sin x}{2} \leqslant 2 \quad \Leftrightarrow$$

$$1 + \frac{1}{x} \leqslant \frac{3}{2} + \frac{\sin x}{2} + \frac{1}{x} \leqslant 2 + \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \frac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant 2 + \frac{1}{x}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{3}{2}$ mais $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{2}$ n'existe pas.

La fonction f n'admet donc pas de limite bien que l'encadrement soit vérifié.

On peut tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ ainsi que les deux fonctions homographique de l'encadrement :