Contrôle de mathématiques

Mardi 29 novembre 2016

Exercice 1

ROC **(3 points)**

On pose la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x - x$.

1) Étudier les variations de f et montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) > 0$.

2) En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

3) En faisant un changement de variable astucieux démontrer que : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

Exercice 2

Propriétés, équation et inéquation **(3 points)**

On justifiera chaque étape des résolutions suivantes.

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

   a) $e^{x^2+x} = 1$ b) $e^{2x-1} \times e^{x+5} = e^{3-2x}$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation suivante : $e^{2x+3} < \dfrac{1}{e}$.

Exercice 3

Limite et dérivée. **(2 points)**

1) En mettant en évidence les limites de référence, déterminer : $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x+1)e^x$.

2) Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{1-x^2}$.

Exercice 4

Fonction **(4 points)**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{3}{4 + 6\,e^{-2x}}$.

1) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2) Déterminer la fonction dérivée de la fonction f.

3) En déduire les variations de la fonction f puis dresser son tableau de variation.

Exercice 5

D'après bac **(8 points)**

Paul, étudiant de 19 ans de corpulence moyenne et jeune conducteur, boit deux verres de rhum. La concentration C d'alcool (en g.L^{-1}) dans son sang est modélisée en fonction du temps t, exprimé en heure, par la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(t) = 2t\,e^{-t}$$

1) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
2) À quel instant la concentration d'alcool dans le sang de Paul est-elle maximale ? Quelle est alors sa valeur ? Arrondir à 10^{-2} près.
3) Rappeler la limite de $\dfrac{e^t}{t}$ lorsque t tend vers $+\infty$ et en déduire celle de $f(t)$ en $+\infty$.
   Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4) Paul veut savoir au bout de combien de temps il peut prendre sa voiture. On rappelle que la législation autorise une concentration maximale d'alcool dans le sang de $0,2$ g.L^{-1} pour un jeune conducteur.
   a) Démontrer qu'il existe deux nombres réels t_1 et t_2 tels que : $f(t_1) = f(t_2) = 0,2$.
   b) Quelle durée minimale Paul doit-il attendre avant de pouvoir prendre le volant en toute légalité ?
      Donner le résultat arrondi à la minute la plus proche. On pourra calculer $f(4)$ et rentrer la fonction $g = f - 0,2$ pour l'algorithme de dichotomie.
5) La concentration minimale d'alcool détectable dans le sang est estimée à 5×10^{-3} g.L^{-1}.
   a) Justifier qu'il existe un instant T à partir duquel la concentration d'alcool dans le sang n'est plus détectable.
   b) On donne l'algorithme suivant où f est la fonction définie par $f(t) = 2t\,e^{-t}$.

Variables : t, p, C : réel
Entrées et initialisation
    t prend la valeur 3,5
    p prend la valeur 0,25
    C prend la valeur 0,21
Traitement
    tant que $C > 5 \times 10^{-3}$ **faire**
        t prend la valeur $t + p$
        C prend la valeur $f(t)$
    fin
Sorties : Afficher t

Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant en exécutant cet algorithme (à la main).
Arrondir les valeurs à 10^{-2} près.

	Initialisation	Étape 1	Étape 2
p	0,25		
t	3,5		
C	0,21		

Que représente la valeur affichée par cet algorithme ?