Correction contrôle de mathématiques

Du mardi 29 novembre 2016

Exercice 1

ROC **(3 points)**

Voir cours

Exercice 2

Propriétés, équation et inéquation **(3 points)**

On justifiera chaque étape des résolutions suivantes.

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

   a) Comme la fonction exp est monotone sur $\mathbb{R}$:

   $e^{x^2+x} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{x(x+1)} = e^0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ ou } x = -1$

   On a l'ensemble solution $S = \{-1\ ;\ 0\}$

   b) Comme la fonction exp est monotone sur $\mathbb{R}$:

   $e^{2x-1} \times e^{x+5} = e^{3-2x} \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x-1+x+5} = e^{-2x+3} \quad \Leftrightarrow \quad e^{3x+4} = e^{3-2x} \quad \Leftrightarrow$
   $3x + 4 = 3 - 2x \quad \Leftrightarrow \quad x = -\dfrac{1}{5}$

   On a l'ensemble solution $S = \left\{-\dfrac{1}{5}\right\}$

2) Comme la fonction exp est croissante sur $\mathbb{R}$:

   $e^{2x+3} < \dfrac{1}{e} \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x+3} < e^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 3 < -1 \quad \Leftrightarrow \quad x < -2.$

   On a l'ensemble solution $S =]-\infty\ ; -2[$

Exercice 3

Limite et dérivée. **(2 points)**

1) On ne peut résoudre la limite par produit (forme $+\infty \times 0$), on développe :

   $(2x+1)e^x = 2xe^x + e^x$, des limites de référence $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$,

   On déduit par produit et somme : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (2x+1)e^x = 0$.

2) On dérive f avec : $(e^u)' = u'e^u$ et $(uv)' = u'v + uv'$,

   $f'(x) = e^{1-x^2} + x(-2x)e^{1-x^2} = e^{1-x^2}(1 - 2x^2)$.

Exercice 4

Fonction **(4 points)**

1) Limites de f en $+\infty$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} -2x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0\end{array}\right\} \text{ Par composition } \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$$

Par somme et quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{4}{3}$

Limites de f en $-\infty$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} -2x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty\end{array}\right\} \text{ Par composition } \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x} = +\infty$$

Par somme et quotient $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

2) $f'(x) = -\dfrac{3\times 6(-2)e^{-2x}}{(4+6\,e^{-2x})^2} = \dfrac{36\,e^{-2x}}{(4+6\,e^{-2x})^2}$

3) Comme $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-2x} > 0$, alors $f'(x) > 0$. La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3}{4}$

Exercice 5

D'après bac **(8 points)**

1) $f'(t) = 2e^{-t} + 2t(-1)e^{-t} = 2e^{-t}(1-t)$.

- $f'(t) = 0 \Leftrightarrow 1 - t = 0 \Leftrightarrow t = 1$.
- Comme $\forall t \in [0\,;+\infty[$, $e^{-t} > 0$, le signe de $f'(t)$ est du signe de $(1-t)$. En conséquence :

  Si $0 \leqslant t < 1$, $f'(t) > 0$, la fonction f est croissante.
  Si $t > 1$, $f'(t) < 0$, la fonction f est décroissante.

2) La concentration d'alcool dans le sang de Paul est maximale au bout d'une heure. Sa valeur est alors $C = \dfrac{2}{e} \approx 0,74$ g.L^{-1}.

3) $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{e^{t}}{t} = +\infty$ or $f(t) = t\,e^{-t} = \dfrac{t}{e^{t}}$ donc par quotient $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

La concentration d'alcool dans le sang finit par disparaître au bout d'un certain temps.

4) a) D'après les questions 1) et 2), on obtient le tableau de variation suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\searrow$	0

- Sur $[0\ ;\ 1]$,

  La fonction f est continue car dérivable,
  La fonction f est monotone (f croissante)
  0,2 est compris entre $f(0) = 0$ et $f(1) = 2e^{-1} \approx 0,74$.
  D'après le théorème des valeurs intermédiaire, l'équation $f(t) = 0,2$ admet une unique solution t_1

- Sur $[1\ ;\ +\infty[$,

  La fonction f est continue car dérivable,
  La fonction f est monotone (f décroissante)
  0,2 est compris entre $f(1) = 2e^{-1} \approx 0,74$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.
  D'après le théorème des valeurs intermédiaire, l'équation $f(t) = 0,2$ admet une unique solution t_2

Conclusion : il existe deux nombres réels t_1 et t_2 tels que : $f(t_1) = f(t_2) = 0,2$.

b) Le temps cherché est le temps $t_2 > 1$, le moment où la concentration dans le sang diminue où est devient égal à 0,2 g.L^{-1}.

Calculons $f(4) = 8e^{-3} \approx 0.15$. La valeur t_2 est donc compris entre 1 et 4.

A l'aide de l'algorithme de dichotomie avec une précision de 10^{-2}, on trouve $3,57 < t_2 < 3,58$.

Pour avoir l'encadrement en heures, minutes on calcule : $\dfrac{57 \times 60}{100} \approx 34,2$ et $\dfrac{58 \times 60}{100} \approx 34,8$. On en déduit que : $t_2 \approx$ 3h 34mn

5) a) On sait que la fonction f tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$. Cela signifie que l'intervalle ouvert centrée en 0 de largeur 5×10^{-3}, contient toutes les valeurs de $f(t)$ pour t suffisamment grand, c'est à dire pour un temps $t \geqslant T$.

b) On obtient le tableau de valeurs suivant :

	Initialisation	Étape 1	Étape 2
p	0,25	0,25	0,25
t	3,5	3,75	4
C	0,21	0,18	0,15

La valeur affichée par cet algorithme, représente le temps T (au quart d'heure près) à partir duquel la concentration dans le sang est inférieure ou égale à 5×10^{-3} g.L^{-1}. La valeur de t étant incrémentée avec un pas de 0,25.

On trouve alors $T = 8,25$