Correction contrôle de mathématiques
Du mardi 16 mai 2017

EXERCICE 1

Droites et plan **(6 points)**

1) On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB}(0\,;\,1\,;\,1)$ $\quad\overrightarrow{AC}(2\,;-2\,;\,2)$.

   Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires $\left(\dfrac{0}{2} \neq \dfrac{1}{-2}\right)$.

   Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
   Les points A, B et C ne sont pas alignés et forment donc un plan.

2) On détermine un vecteur directeur de la droite (AD), par exemple $\overrightarrow{AD}(2\,;\,4\,;-1)$.

   Une représentation paramétrique de la droite (AD) est alors $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 4t\ , \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -t \end{cases}$

3) On calcule les deux produits scalaires suivants :

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = 0 + 1 - 1 = 0 \quad \text{et} \quad \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix} = 4 - 2 - 2 = 0$$

   $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non colinéaires donc $\vec{n}$ est normal au plan (ABC).

4) Soit M$(x\,;\,y\,;\,z)$ un point du plan (ABC), on a alors :

$$\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0 \iff \begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} = 0 \iff 2(x-1) + (y-1) - z = 0$$

   Une équation cartésienne du plan (ABC) est : $2x + y - z - 3 = 0$

5) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} = \text{AD}\times\text{AB}\cos\widehat{\text{DAB}} \iff \cos\widehat{\text{DAB}} = \dfrac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}}{\text{AD}\times\text{AB}}$

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = 0 + 4 - 1 = 3$$

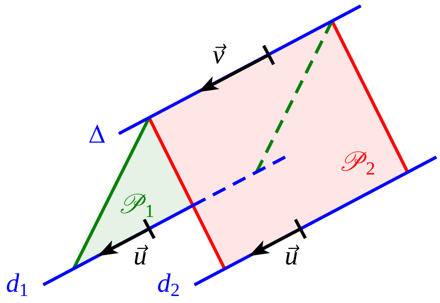
   $\text{AD} = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{21}$ et $\text{AB} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$

   On a alors : $\cos\widehat{\text{DAB}} = \dfrac{3}{\sqrt{42}} \iff \widehat{\text{DAB}} = \arccos\left(\dfrac{3}{\sqrt{42}}\right) \approx 62{,}4^\circ$

EXERCICE 2

Question de cours **(2 points)**

Si deux droites parallèles d_1 et d_2 contenues respectivement dans les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sécants en Δ alors la droite Δ est parallèle à d_1 et d_2.



EXERCICE 3

Pyramide **(12 points)**

Partie A : un calcul de volume sans repère

1) D'après la configuration, le triangle ASC est isocèle en S (arêtes de même longueur).
Dans un triangle isocèle en S, la médiane et la hauteur issues de S sont confondues.
O est le milieu du segment [AC] donc (OS) est la médiane et la hauteur issues de S.
La droite (OS) est orthogonale à la droite (AC).

Par un raisonnement identique dans le triangle BSD, la droite (OS) est orthogonale à la droite (BD).

Comme (OS) est orthogonale à deux droites sécantes en O du plan (ABC), la droite (OS) est orthogonale au plan (ABC).

2) $V_{\text{SABCD}} = \dfrac{\text{Aire(ABCD)} \times \text{OS}}{3}$.

$\text{AC} = \text{AB}\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad \text{AB} = \dfrac{\text{AC}}{\sqrt{2}} = \dfrac{24}{\sqrt{2}} = 12\sqrt{2}$

$\text{OS} = \text{OA} = \dfrac{\text{AC}}{2} = 12$

On a alors : $V_{\text{SABCD}} = \dfrac{(12\sqrt{2})^2 \times 12}{3} = 1\,152 \text{ cm}^3$.

Partie B : dans un repère

1) a) $\text{A}(1\,;0\,;0)$, $\text{S}(0\,;0\,;1)$, $\text{B}(0\,;1\,;0)$ et $\text{C}(-1\,;\,0\,;\,0)$.

On a alors $\text{P} = m[\text{AS}] = \left(\dfrac{1}{2}\,;\,0\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$ et $\text{Q} = m[\text{BS}] = \left(0\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$

b) $\overrightarrow{\text{PQ}}\left(-\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,0\right)$ et $\overrightarrow{\text{PC}}\left(-\dfrac{3}{2}\,;\,0\,;-\dfrac{1}{2}\right)$.

On calcule les deux produits scalaires suivants :

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\text{PQ}} = \begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+0 = 0 \quad \text{et} \quad \vec{n}\cdot\overrightarrow{\text{PC}} = \begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix} = -\frac{3}{2}+0+\frac{3}{2} = 0$$

$\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PC}$ non colinéaires donc $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (PQC).

c) Soit M(x ; y ; z) un point du plan (PQC), on a alors :

$$\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x - \frac{1}{2} \\ y \\ z - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{1}{2}\right) + y - 3\left(z - \frac{1}{2}\right) = 0$$

Une équation cartésienne du plan (ABC) est : $x + y - 3z + 1 = 0$

2) a) La droite (SH) est orthogonale au plan (PQC) alors le vecteur $\overrightarrow{SH}$ est colinéaire à $\overrightarrow{n}$.

$\overrightarrow{n}$ est un vecteur directeur de la droite (SH).

Une représentation paramétrique de la droite (SH) est alors $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

b) Comme H appartient aussi au plan (PQC), ses coordonnées vérifient l'équation du plan (PQC). On a alors :

$$x_H + y_H - 3_H + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t + t - 3 + 9t + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 11t = 2 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{2}{11}$$

En remplaçant dans les équations de la droite (SH), on a : $H\left(\frac{2}{11} ; \frac{2}{11} ; \frac{5}{11}\right)$.

c) On a alors : $\overrightarrow{SH}\left(\frac{2}{11} ; \frac{2}{11} ; \frac{6}{11}\right)$

$$SH = \sqrt{\left(\frac{2}{11}\right)^2 + \left(\frac{2}{11}\right)^2 + \left(\frac{6}{11}\right)^2} = \frac{\sqrt{4+4+36}}{11} = \frac{\sqrt{44}}{11} = \frac{2\sqrt{11}}{11}$$

3) $$V_{SPQCD} = \frac{\text{Aire(PQCD)} \times SH}{3} = \frac{\frac{3\sqrt{11}}{8} \times \frac{2\sqrt{11}}{11}}{3} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \text{ u.v.}$$

Partie C : partage équitable

Anne propose de couper le gâteau suivant le plan (PQC).

L'unité de volume vaut : $1\text{u.a.} = OA^3 = 12^3 = 1\,728 \text{ cm}^3$.

Le volume de SPQCD vaut alors $V_{SPQCD} = \frac{1728}{4} = 432 \text{ cm}^3$.

Or la moitié du volume total vaut : $\frac{V_{SABCD}}{2} = \frac{1152}{2} = 576 \text{ cm}^3$.

Fanny a tout à fait raison d'avoir des doutes car les parts ne sont pas équitables.