BACCALAURÉAT BLANC

DE MATHÉMATIQUES

– SÉRIE S –

Durée de l'épreuve : 4 HEURES
Les calculatrices sont AUTORISÉES

Coefficient : 7 ou 9

Le candidat doit traiter trois exercices plus un exercice suivant sa spécialité. La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- *le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.*
- ***votre spécialité** : mathématique, physique ou SVT.*

EXERCICE 1 (5 points)

1) a) $|a| = \dfrac{\sqrt{2+2}}{2} = 1$ et $\begin{cases} \cos\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ $\theta = \dfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]$

La forme exponentielle de a est donc : $a = e^{i\frac{3\pi}{4}}$

b) $f(a) = e^{i\frac{3\pi}{4}} + e^{-i\frac{3\pi}{4}} = e^{i\frac{3\pi}{4}} + \overline{e^{i\frac{3\pi}{4}}} = 2\mathrm{Re}\left(e^{i\frac{3\pi}{4}}\right) = 2\cos\dfrac{3\pi}{4} = -\sqrt{2}$

2) $f(z) = 1 \Leftrightarrow z + \dfrac{1}{z} = 1 \overset{\times z}{\Leftrightarrow} z^2 - z + 1 = 0.$

$\Delta = 1 - 4 = -3 = (\sqrt{3}i)^2$, comme $\Delta < 0$, 2 racines complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{ou} \quad z_2 \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

3) a) Comme M est sur le cercle de centre O et de rayon 1, on a $|z| = 1$.
La forme exponentielle de z est donc $e^{i\theta}$

b) $f(z) = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = e^{i\theta} + \overline{e^{i\theta}} = 2\mathrm{Re}(e^{i\theta}) = 2\cos\theta.$

$f(z)$ est donc un réel.

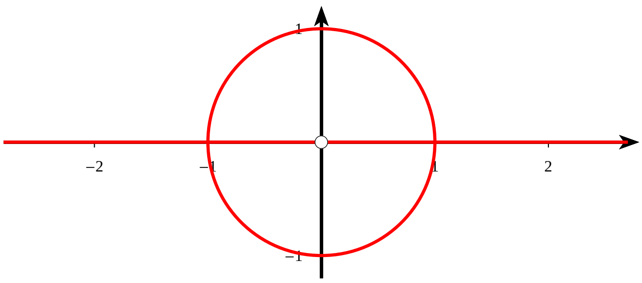
4) a) $f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(z) = \overline{f(z)} \Leftrightarrow z + \dfrac{1}{z} = \overline{\left(z + \dfrac{1}{z}\right)} \Leftrightarrow z + \dfrac{1}{z} = \bar{z} + \dfrac{1}{\bar{z}} \Leftrightarrow z - \bar{z} = \dfrac{1}{\bar{z}} - \dfrac{1}{z} \Leftrightarrow$

$z - \bar{z} = \dfrac{z - \bar{z}}{\bar{z}z} \overset{z\bar{z} = |z|^2}{\Leftrightarrow} (z - \bar{z})|z|^2 = z - \bar{z} \Leftrightarrow (z - \bar{z})|z|^2 - (z - \bar{z}) \Leftrightarrow (z - \bar{z})(|z|^2 - 1) = 0$

b) $f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (z - \bar{z})(|z|^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow z - \bar{z} = 0$ ou $|z|^2 - 1 = 0$

- $z - \bar{z} = 0 \Leftrightarrow z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}^*$
- $|z|^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1 \Leftrightarrow \mathrm{OM} = 1$

L'ensemble des point M(z) pour que $f(z)$ soit réel, est l'union de la droite des abscisses privé du point O et du cercle de centre O et de rayon 1.



EXERCICE 2 (5 points)

Partie A

1) Deux méthodes :

- La fonction ln et la fonction $x \mapsto x - 3$ sont deux fonctions croissantes sur $]0\,;+\infty[$, donc leur somme u est croissante sur $]0\,;+\infty[$.
- $u'(x) = \dfrac{1}{x} + 1.$

  Sur $]0\,;+\infty[$, $\dfrac{1}{x} + 1 > 0$ donc $u'(x) > 0$, la fonction u est croissante sur $]0\,;+\infty[$.

2) Sur l'intervalle $[2\ ;\ 3]$:
- la fonction u est continue car dérivable ;
- la fonction u est monotone car croissante ;
- la fonction u change de signe car $u(2) \approx -0,31$ et $u(3) \approx +1,10$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [2\ ;\ 3]$.

3) Comme u est croissante : si $x < \alpha,\ u(x) < 0$ et si $x > \alpha,\ u(x) > 0$

Partie B

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} -\dfrac{1}{x} = -\infty$ donc par somme $\lim\limits_{x\to 0^+} 1 - \dfrac{1}{x} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ donc par somme $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x - 2 = -\infty$

Par produit $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)(\ln x - 2) = +\infty$ et par somme $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

2) a) $f'(x) = \dfrac{1}{x^2}(\ln x - 2) + \left(1 + \dfrac{1}{x}\right) \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{\ln x - 2 + x - 1}{x^2} = \dfrac{\ln x + x - 3}{x^2} = \dfrac{u(x)}{x^2}$

b)
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow u(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$
- Le signe de f' est le signe de u car $\forall x \in]0\ ;+\infty[,\ x^2 > 0$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

Partie C

1) $f(x) - \ln(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)(\ln x - 2) + 2 - \ln x = \ln x - 2 - \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{2}{x} + 2 - \ln x = \dfrac{2 - \ln x}{x}$.

$f(x) = \ln x \Leftrightarrow 2 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2$

Les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ont donc un seul point commun $\mathrm{I}\left(e^2\ ;\ln e^2\right) = (e^2\ ;\ 2)$.

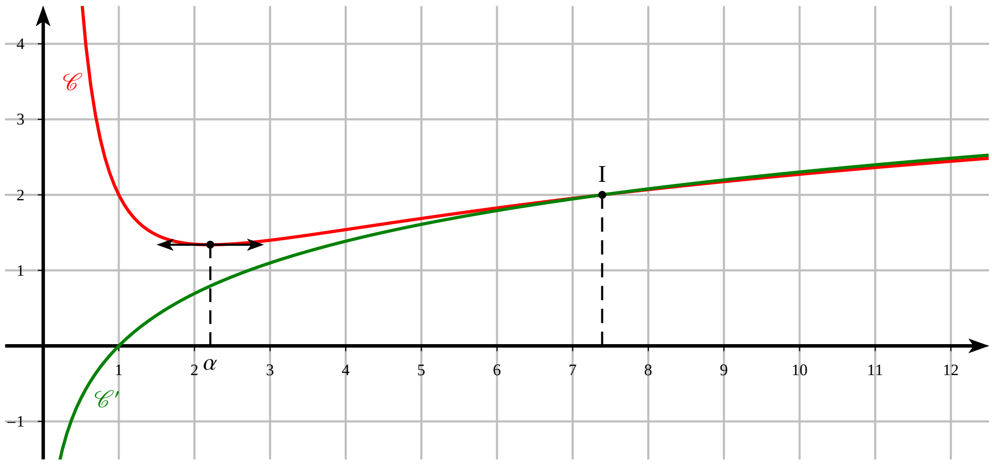
Comme la fonction ln est croissante sur $]0\ ;+\infty[$, la fonction $x \mapsto 2 - \ln x$ est décroissante sur $]0\ ;+\infty[$. En conséquence :

- Si $x < e^2,\ 2 - \ln x > 0$, la courbe $\mathscr{C}$ est **au dessus** de $\mathscr{C}'$
- Si $x > e^2,\ 2 - \ln x < 0$, la courbe $\mathscr{C}$ est **en dessous** de $\mathscr{C}'$

2) $\dfrac{2 - \ln x}{x} = \dfrac{2}{x} - \dfrac{\ln x}{x}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2 - \ln x}{x} = 0$.

La courbe $\mathscr{C}'$ est donc une courbe asymptote pour $\mathscr{C}$ en $+\infty$



EXERCICE 3 (5 points)

Partie 1

1) $v_1'(t) = 5 \times \dfrac{0,3\,e^{0,3t}\left(e^{0,3t}+1\right) - 0,3\,e^{0,3t}\left(e^{0,3t}-1\right)}{(e^{0,3t}+1)^2} = 5 \times \dfrac{0,3\,e^{0,3t}\left(e^{0,3t}+1-e^{0,3t}+1\right)}{(e^{0,3t}+1)^2}$

$= 5 \times \dfrac{0,6\,e^{0,3t}}{(e^{0,3t}+1)^2} = \dfrac{3\,e^{0,3t}}{(e^{0,3t}+1)^2}$

$\forall t \in [0\,;+\infty[,\quad e^{0,3t} > 0 \quad \Rightarrow \quad v_1'(t) > 0.$ La fonction v_1 est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

2) $\dfrac{e^{0,3t}-1}{e^{0,3t}+1} = \dfrac{e^{0,3t}\left(1-e^{-0,3t}\right)}{e^{0,3t}\left(1+e^{-0,3t}\right)} = \dfrac{1-e^{-0,3t}}{1+e^{-0,3t}}$

$\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0,3t} = 0$ par somme et quotient $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1-e^{-0,3t}}{1+e^{-0,3t}} = 1$ par produit $\lim\limits_{t\to+\infty} v_1(t) = 5$

Comme v_1 est croissante, $\forall t \in [0\,;+\infty[,\quad v_1(t) \leqslant 5 < 6$

Le colis ne risque donc pas d'être endommagé lorsque le parachute s'ouvre correctement.

Partie 2

1) $v_2(10) = 32,7(1-e^{-3}) \approx 31,1$ m.s^{-1}.

2) $v_2(t) = 30 \quad \Leftrightarrow \quad 32,7\left(1-e^{-0,3t}\right) = 30 \quad \Leftrightarrow \quad 1-e^{-0,3t} = \dfrac{30}{32,7} \quad \Leftrightarrow \quad e^{-0,3t} = 1-\dfrac{30}{32,7} = \dfrac{2,7}{32,7} \quad \Leftrightarrow$

$-0,3t = \ln\left(\dfrac{2,7}{32,7}\right) \quad \Leftrightarrow \quad t = -\dfrac{1}{0,3}\ln\left(\dfrac{2,7}{32,7}\right) \approx 8,3.$

Le colis atteint la vitesse de 30 m.s^{-1} au bout de 8,3 s.

3) a) On cherche la primitive V_2 de v_2 :

$v_2(t) = 32,7 - 32,7e^{-0,3t} = 32,7 + \dfrac{32,7}{0,3}\left(-0,3\,e^{-0,3t}\right)$

On en déduit la primitive $V_2 = 32,7t + \dfrac{32,7}{0,3}e^{-0,3t} = 32,7t + 109e^{-0,3t} = 109\left(0,3t + e^{0,3t}\right)$

$d(T) = \displaystyle\int_0^T v_2(t)\,\mathrm{d}t = V_2(T) - V_2(0) = 109\left(0,3T + e^{-0,3T}\right) - 109(0+1) = 109\left(e^{-0,3T} + 0,3T - 1\right)$

b) Comme la chute dure 20 s, la distance parcourue est $d(20) = 109(e^{-6}+6-1) \approx 545$ m

4) Il faut déterminer T pour que $d(T) = 700$

$d'(T) = v_2(T)$ et $\forall T > 0,\ -0,3T < 0 \overset{\exp\nearrow}{\Rightarrow} e^{-0,3T} < e^0 \Rightarrow e^{-0,3T} < 1 \Rightarrow v_2(T) > 0$

La fonction d est donc croissante, comme d est continue si la valeur de T existe pour $d(T) = 700$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires, cette valeur est unique.

$d(T) = 700 \Leftrightarrow d(T) - 700 = 0.$

A l'aide du programme de dichotomie sur l'intervalle $[0\,;30]$, on trouve l'encadrement à 10^{-1} : $24,7 < T < 24,8$ après 9 itérations.

Exercice 4 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1) On obtient le tableau suivant :

n	1	2	5	10	50
u_n	1,8	2,44	3,689	4,571	5,000

On vu de ce tableau, on peut conjecturer que la suite (u_n) est croissante et converge vers 5.

2) Soit la proposition : $u_n = 5 - 4 \times 0,8^n$.

Initialisation : $n = 0$: $u_0 = 1$ et $5 - 4 \times 0,8^0 = 5 - 4 = 1$. La proposition est initialisée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $u_n = 5 - 4 \times 0,8^n$, montrons que $u_{n+1} = 5 - 4 \times 0,8^{n+1}$.

$u_{n+1} = 0,8u_n + 1 \overset{\text{HR}}{=} 0,8(5 - 4 \times 0,8^n) + 1 = 4 - 4 \times 0,8^{n+1} + 1 = 5 - 4 \times 0,8^{n+1}$.

La proposition est héréditaire.

Par initialisation et hérédité : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 5 - 4 \times 0,8^n$

3)
- Variation : La suite $(0,8)^n)$ est décroissante car $0 < 0,8 < 1$, donc la suite $(-0,8^n)$ est croissante et par somme la suite (u_n) est croissante.

  Autre méthode : $u_{n+1} - u_n = 5 - 0,8^{n+1} - 5 + 0,8^n = 0,8^n(-0,8 + 1) = 0,2 \times 0,8^n > 0$
- Limite : $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,8^n = 0$ car $-1 < 0,8 < 1$, par produit et somme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 5$.

La population d'abeille augmente pour se stabiliser au bout d'un certain nombre d'années à 50 000.

Partie B

1) $v_{n+1} = u_{n+1} - 5c = 0.8u_n + c - 5c = 0,8u_n - 4c = 0,8\left(u_n - \dfrac{4}{0,8}\right) = 0,8(u_n - 5c) = 0.8u_n.$

$\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 0,8,$
la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,8$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 5c = 1 - 5c$.

2) $v_n = v_0\, q^n = (1 - 5c)\, 0,8^n$ donc $u_n = v_n + 5c = (1 - 5c)\, 0,8^n + 5c$.

3) $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,8^n = 0$ car $-1 < 0,8 < 1$, par produit et somme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 5c$.
Pour que l'apiculteur atteigne sont objectif, on doit avoir $5c = 10 \Leftrightarrow c = 2$

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A : divisibilité des rep-units dans quelques cas particuliers

1) Un nombre est divisible par 2 s'il se termine par 0, 2, 4, 6, 8 donc N_p n'est pas divisible par 2.
Un nombre est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou 5 donc N_p n'est pas divisible par 5.

2) a) $10 = 3 \times 3 + 1$ donc $10 \equiv 1\ (3)$ par compatibilité avec la puissante $\forall j \in \mathbb{N},\ 10^j \equiv 1\ (3)$.

b) $N_p \equiv \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} 10^k \equiv \sum_{k=0}^{p-1} 1 \equiv \underbrace{1+1+\cdots+1}_{p \text{ termes}} \equiv p\ \ (3)$.

c) N_p est divisible par 3 si, et seulement si, $p \equiv 0\ \ (3)$.
Une condition nécessaire et suffisante pour que N_p soit divisible par 3 est « p divisible par 3 ».

3) a) On obtient le tableau suivant :

m	0	1	2	3	4	5	6
a	1	3	2	-1	-3	-2	1

b) Division euclidienne de p par 6 : $p = 6q + r$ avec $0 \leqslant r < 6$.

$10^p = 10^{6q+r} = (10^6)^q \times 10^r$ donc :

$10^p \equiv 1\ (7) \Leftrightarrow (10^6)^q \times 10^r \equiv 1\ (7) \overset{10^6 \equiv 1\ (7)}{\Leftrightarrow} 1^q \times 10^r \equiv 1\ (7) \Leftrightarrow 10^r \equiv 1\ (7)$

or comme $r < 6$, d'après le tableau de la question a), la seule valeur possible est $r = 0$.

$10^p \equiv 1\ (7)$ si, et seulement si p est un multiple de 6.

c) $N_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} 10^k = 1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^{p-1}$.

N_p est la somme des p premiers termes d'une suite géométrique de raison 10 et de premier terme 1, on a donc :

$N_p = 1 \times \dfrac{1-10^p}{1-10} = \dfrac{10^p - 1}{9}$.

d) Si 7 divise N_p alors 7 divise $9N_p$ immédiat.

Réciproquement, si 7 divise $9N_p$, comme 7 et 9 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, 7 divise N_p.

$N_p \equiv 0\ (7) \Leftrightarrow 9N_p \equiv 0\ (7)$

e) D'après l'égalité de la question c), $9N_p = 10^p - 1$

$N_p \equiv 0\ (7) \Leftrightarrow 9N_p \equiv 0\ (7) \overset{c)}{\Leftrightarrow} 10^p - 1 \equiv 0\ (7) \Leftrightarrow 10^p \equiv 1\ (7) \overset{b)}{\Leftrightarrow} p \equiv 0\ (6)$

Partie B : un rep-unit strictement supérieur à 1 n'est jamais un carré parfait

1) a) On obtient le tableau suivant :

$n \equiv\ (10)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n^2 \equiv\ (10)$	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

b) D'après le tableau la terminaison 1 pour un carré se produit uniquement si le nombre n se termine par 1 ou par 9 (congru à -1 modulo 10) donc $n = 10m + 1$ ou $n = 10m - 1$.

c) On élève au carré ces deux possibilités :

- $n = 10m + 1 \quad \Leftrightarrow \quad n^2 = 100m^2 + 20m + 1 = 20(5m^2 + m) + 1 \quad \Leftrightarrow \quad n \equiv 1\ (20)$
- $n = 10m - 1 \quad \Leftrightarrow \quad n^2 = 100m^2 - 20m + 1 = 20(5m^2 - m) + 1 \quad \Leftrightarrow \quad n \equiv 1\ (20)$

Dans tous les cas de figure $n^2 \equiv 1\ (20)$

2) • Si $p = 2$ alors $N_2 \equiv 11\ (20)$

- Si $p \geqslant 3$, on peut décomposer N_p comme suit : $N_p = 10^2(1 + 10 + \cdots + 10^{p-3}) + 11$

  Comme $10^2 \equiv 0\ (20)$ on en déduit que $N_p \equiv 11\ (20)$

3) Comme $\forall p \geqslant 2$, $N_p \not\equiv 1\ (20)$, d'après la question 1) c) N_p n'est pas le carré d'un entier.