

# Correction contrôle de mathématiques

## Du lundi 04 décembre 2017

### EXERCICE 1

**ROC**

**(3 points)**

Voir cours.

### EXERCICE 2

**Propriétés, équation et inéquation**

**(3 points)**

1) a) Comme la fonction exp est monotone sur  $\mathbb{R}$ , on a les équivalences :

$$e^{x^2+5} = e^{2x+4} \Leftrightarrow x^2+5 = 2x+4 \Leftrightarrow x^2-2x+1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$S = \{1\}$$

b) Comme la fonction exp est strictement positive sur  $\mathbb{R}$ , on a les équivalences :

$$xe^{2x} - 2e^{2x} = 0 \Leftrightarrow e^{2x}(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Leftrightarrow S = \{2\}$$

2) Comme la fonction exp est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ , on a les équivalences :

$$e^{2x-1} > e^x \Leftrightarrow 2x-1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow S = ]\frac{1}{2}; +\infty[.$$

### EXERCICE 3

**Limite et dérivée.**

**(4 points)**

1) a)  $\frac{e^x - 1}{x} = \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0 \text{ par somme } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x} = +\infty.$$

b)  $\frac{e^x - 1}{3x} = \frac{1}{3} \times \frac{e^x - 1}{x}$ , or  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$  par produit  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{3x} = \frac{1}{3}$ .

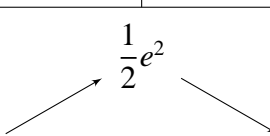
c)  $(x-1)e^x = xe^x - e^x$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} -e^x = 0 \text{ par somme } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)e^x = 0.$$

2)  $(e^u)' = u'e^u$

$$f'(x) = -e^{2x+1} + 2(1-x)e^{2x+1} = e^{2x+1}(-1 + 2 - 2x) = e^{2x+1}(1 - 2x).$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ car } \forall x \in \mathbb{R}, e^{2x+1} > 0. \text{ Signe } f'(x) = \text{signe}(1 - 2x)$$

$x$	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\frac{1}{2}e^2$ 		

**EXERCICE 4****Un grand BOUM****(10 points)****Partie A**

$$1) \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 \text{ par somme } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1.$$

$$g(x) = (1-x)e^x + 1 \text{ donc } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} 1-x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par produit et somme} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \end{array}.$$

$$2) g'(x) = e^x - e^x - xe^x = -xe^x.$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ car } \forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$$

signe de  $g'(x)$  = signe de  $(-x)$ . On obtient le tableau de variation suivant :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	$0$	$-$
$g(x)$	$1$	$2$	$-\infty$

$$3) \text{ Sur } ]-\infty; 0[, g(x) > 1 \text{ donc ne peut s'annuler.}$$

Sur  $[0; +\infty[$

- $g$  est continue car dérivable.
- $g$  est monotone car décroissante.
- $g$  change de signe car  $g(0) = 2$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$ .

Conclusion : Sur  $\mathbb{R}$ , l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$ .

$$g(2) = -e^2 + 1 \approx -6,39 \text{ donc } g \text{ change de signe sur } [0,2] \text{ et donc } 0 < \alpha < 2.$$

L'algorithme de dichotomie donne :  $1,278 < \alpha < 1,279$  après 11 itérations.

$$4) g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (1-\alpha)e^\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow e^\alpha = \frac{-1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}.$$

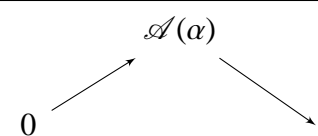
$$5) \text{ D'après les variations de } g, \text{ si } x < \alpha \text{ alors } g(x) > 0 \text{ et si } x > \alpha \text{ alors } g(x) < 0$$

**Partie B**

$$1) \text{ a) } \mathcal{A}(x) = x \times f(x) = \frac{4x}{e^x + 1}.$$

$$\text{b) } \mathcal{A}'(x) = \frac{4(e^x + 1) - 4xe^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{4(e^x - xe^x + 1)}{(e^x + 1)^2} = \frac{4g(x)}{(e^x + 1)^2}.$$

$$\text{c) } \forall x \in \mathbb{R}, \frac{4}{(e^x + 1)^2} > 0 \text{ donc signe de } \mathcal{A}'(x) = \text{signe de } g(x). \text{ D'après la partie A :}$$

$x$	0	$\alpha$	$+\infty$
$\mathcal{A}'(x)$	+	0	-
$\mathcal{A}(x)$	$\mathcal{A}(\alpha)$ 		

2) L'aire du rectangle BOUM est donc maximale lorsque M a pour abscisse  $\alpha$ .

$$\mathcal{A}(\alpha) = \frac{4\alpha}{e^\alpha + 1} \stackrel{A.5)}{=} \frac{4\alpha}{\frac{1}{\alpha-1} + 1} \stackrel{\times(\alpha-1)}{=} \frac{4\alpha(\alpha-1)}{1+\alpha-1} = \frac{4\alpha(\alpha-1)}{\alpha} = 4(\alpha-1)$$

$$1,278 < \alpha < 1,279 \Leftrightarrow 0,278 < \alpha-1 < 0,279 \Leftrightarrow 1,112 < 4(\alpha-1) < 1,116 \Leftrightarrow$$

$$1,112 < \mathcal{A}(\alpha) < 1,116$$

3) La pente de la droite (BU) en  $\alpha$  vaut :  $m = -\frac{OU}{OB} = -\frac{f(\alpha)}{\alpha}$ .

La pente de la tangente à  $\mathcal{C}_f$  en  $\alpha$  vaut :  $f'(\alpha)$ .

On dérive  $f$  :  $f'(x) = -\frac{4e^x}{(e^x + 1)^2}$ , la valeur en  $\alpha$  vaut donc :

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= -\frac{4e^\alpha}{(e^\alpha + 1)^2} = -\frac{4}{e^\alpha + 1} \times \frac{e^\alpha}{e^\alpha + 1} \stackrel{A.5)}{=} -f(\alpha) \times \frac{\frac{1}{\alpha-1}}{\frac{1}{\alpha-1} + 1} = -f(\alpha) \times \frac{1}{1+\alpha-1} \\ &= -\frac{f(\alpha)}{\alpha} \end{aligned}$$

Les deux pentes sont égales, donc la tangente à  $\mathcal{C}_f$  en  $\alpha$  est parallèle à la droite (BU).

