Contrôle de mathématiques

Mercredi 17 octobre 2018

EXERCICE 1

ROC **(3 points)**

Démontrer par récurrence l'inégalité de Bernoulli :

$$a > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (1+a)^n \geqslant 1 + na$$

En déduire alors que la suite (q^n), avec $q > 1$, diverge vers $+\infty$

EXERCICE 2

Limites de suites définies explicitement **(4 points)**

Déterminer et rédiger soigneusement les limites des suites (u_n) suivantes :

1) $u_n = 2 - n + (-1)^n$

2) $u_n = 3 \times \dfrac{1 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^n}{1 - \dfrac{1}{4}}$

3) $u_n = \dfrac{-2n+3}{n^2+3n-5}$

4) $u_n = \dfrac{4n^2+3n-1}{2n+1} - 2n + 1$

EXERCICE 3

Vrai faux **(5 points)**

Pour chacune des affirmations proposées, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier cette réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

1) Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 = 14 \\ u_{n+1} = 2u_n - 5. \end{cases}$

   Soit la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par : $t_n = u_n - 5$.

   Affirmation A : La suite (t_n) est une suite géométrique.
   Affirmation B : Pour tout entier naturel n, $u_n = 9 \times 2^n + 5$.

2) Soit une suite (v_n).

   Affirmation C : Si $\forall n > 1, \quad -1 - \dfrac{1}{n} \leqslant v_n \leqslant 1 + \dfrac{1}{n}$ alors la suite (v_n) converge.

3) **Affirmation D :** $\forall n \geqslant 1, \quad (8 \times 1 + 3) + (8 \times 2 + 3) + \cdots + (8 \times n + 3) = n(4n+7)$.

4) Soit (w_n) une suite convergente.

   Affirmation E : Si, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite (w_n) sont strictement positifs, alors la limite de la suite (w_n) est aussi strictement positive.

EXERCICE 4

Évolution d'une population animale **(8 points)**

Un biologiste souhaite étudier l'évolution de la population d'une espèce animale dans une réserve. Cette population est estimée à 12 000 individus en 2017. Les contraintes du milieu naturel font que la population ne peut pas dépasser les 50 000 individus.

Partie A : un premier modèle

Dans une première approche, le biologiste estime que la population croît de 8 % par an. L'évolution annuelle de la population est ainsi modélisée par une suite (v_n) où v_n représente le nombre d'individus, exprimé en milliers, en $2017 + n$. On a donc : $v_0 = 12$.

1) Déterminer la nature de la suite (v_n) et donner l'expression de v_n en fonction de n.
2) Calculer une valeur approchée à 10^{-3} de v_{19}. Ce modèle répond-il aux contraintes du milieu naturel ?

Partie B : un second modèle

Le biologiste modélise ensuite l'évolution annuelle de la population par une suite (u_n) définie par $u_0 = 12$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = -\dfrac{1}{180}u_n^2 + 1,25u_n$.

1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -\dfrac{1}{180}x^2 + 1,25x$.
   a) Justifier que f est croissante sur $[0\,;50]$.
   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$.
2) On remarquera que $u_{n+1} = f(u_n)$.
   a) Calculer la valeur de u_1. Interpréter.
   b) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\quad 0 \leqslant u_n \leqslant 45$.
   c) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
   d) En déduire la convergence de la suite (u_n).
   e) On admet que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie $f(\ell) = \ell$. En déduire sa valeur et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.
3) Le biologiste souhaite déterminer le nombre d'années au bout duquel la population dépassera les 42 000 individus avec ce second modèle.

   Il utilise l'algorithme suivant.

```
Variables : n, entier,  u réel
Entrées et initialisation
    n prend la valeur  .................
    u prend la valeur  .................
Traitement
    tant que ......... faire
        u prend la valeur  ............
        n prend la valeur  ............
    fin
Sorties : Afficher .....................
```

   Recopier et compléter cet algorithme afin qu'il affiche en sortie le plus petit entier N tel que $u_N > 42$.

   En quelle année cela se produira-t-il ?