Problème sur rappels sur les suites et les algorithmes.

EXERCICE 1

Intensité lumineuse

En traversant une plaque de verre teintée, un rayon lumineux perd 23 % de son intensité lumineuse.

1) Soit I_0 l'intensité d'un rayon lumineux à son entrée dans la plaque de verre et I_1 son intensité à la sortie. Exprimer I_1 en fonction de I_0.
2) On superpose n plaques de verre identiques ; on note I_n l'intensité du rayon à la sortie de la n-ième plaque.
   a) Exprimer I_n en fonction de I_{n-1}.
   b) Quelle est la nature de la suite (I_n) ?
   Déterminer l'expression de I_n en fonction de n et de I_0.
   c) Quel est le sens de variation de (I_n) ?
3) Quelle est l'intensité initiale (à l'unité près) d'un rayon dont l'intensité après avoir traversé 4 plaques est égale à 15,5 cd (candela) ?
4) Calculer le nombre minimum de plaques qu'un rayon doit avoir traversé pour que son intensité sortante soit inférieure ou égale au quart de son intensité entrante ?

EXERCICE 2

Évolution d'une population : le modèle de Malthus

Une première approche pour modéliser l'évolution d'une population consiste à considérer que les ressources de la population étudiée sont illimitées. On fait alors l'hypothèse que l'accroissement de la population d'une année à l'autre est proportionnel à l'effectif de cette population.

Pour tout entier naturel n , on appelle P_n l'effectif de la population à l'année n. P_n est donc un réel positif. D'après l'hypothèse sur l'accroissement de la population, il existe une constante réelle $k > -1$, dépendant des taux de mortalité et de natalité telle que, pour tout entier naturel n :

$$P_{n+1} - P_n = kP_n$$

1) Justifier que la suite (P_n) ainsi définie est géométrique. On donnera la raison de cette suite en fonction de la valeur de k
2) Déterminer le sens de variation de la suite (P_n) en fonction de la valeur de k.
3) Donner l'expression de P_n en fonction de n. On appellera P_0 la population à l'année de référence.
4) Préciser la limite de la suite (P_n) en fonction de la valeur de k.
5) Interpréter les résultats des questions 2) et 4) en termes d'évolution de population.

EXERCICE 3

Somme de termes

1) Programmer la somme : $T = 5 + 12 + 19 + 26 + \cdots + 2014$ en Python et donner le résultat.
2) Vérifier votre résultat par un calcul.

EXERCICE 4

Médicament par injection

On administre à un patient un médicament par injection intraveineuse. La quantité de médicament dans le sang diminue en fonction du temps.
Le but de l'exercice est d'étudier pour 2 hypothèses, l'évolution de cette quantité minute par minute.

1) On effectue à l'instant 0 une injection de 10 mL de médicament. On estime que 20 % du médicament est éliminé par minute. Pour tout entier naturel n, on note u_n la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang au bout de n minutes. Ainsi $u_0 = 10$.
   a) Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
   b) Pour tout entier naturel n, donner l'expression de u_n en fonction de n.
   c) Au bout de combien de temps la quantité de médicament restant dans le sang devient-elle inférieure à 1 % de la quantité initiale ? Justifier la réponse.
2) On programme une machine de façon que :
   - à l'instant 0, elle injecte 10 mL de médicament,
   - toutes les minutes, elle injecte 1 mL de médicament.

   On estime que 20 % du médicament présent dans le sang est éliminé par minute.
   Pour tout entier naturel n, on note v_n la quantité de médicament, en mL, présente dans le sang du patient au bout de n minutes.
   a) Justifier que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 0,8v_n + 1$.
   b) Pour tout entier naturel n, on pose $w_n = v_n - 5$.
   Démontrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   c) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
   d) Quelle est la limite de la suite (v_n) ? Quelle interprétation peut-on en donner ?