Exercices probabilités conditionnelles et loi binomiale

EXERCICE 1

Métropole 2021

Une chaîne de fabrication produit des pièces mécaniques. On estime que 5 % des pièces produites par cette chaîne sont défectueuses.
Un ingénieur a mis au point un test à appliquer aux pièces. Ce test a deux résultats possibles : « positif » ou « négatif ».
On applique ce test à une pièce choisie au hasard dans la production de la chaîne.
On note $p(\mathrm{E})$ la probabilité d'un événement E.
On considère les évènements suivants :

- D : « la pièce est défectueuse » ;
- T : « la pièce présente un test positif » ;

Compte tenu des caractéristiques du test, on sait que :

- La probabilité qu'une pièce présente un test positif sachant qu'elle est défectueuse est égale à $0,98$;
- la probabilité qu'une pièce présente un test négatif sachant qu'elle n'est pas défectueuse est égale à $0,97$.

Partie I

1) Traduire la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2) a) Déterminer la probabilité qu'une pièce choisie au hasard dans la production de la chaîne soit défectueuse et présente un test positif.
   b) Démontrer que : $p(\mathrm{T}) = 0,077\,5$.
3) On appelle **valeur prédictive positive** du test la probabilité qu'une pièce soit défectueuse sachant que le test est positif. On considère que pour être efficace, un test doit avoir une valeur prédictive positive supérieure à $0,95$.
   Calculer la valeur prédictive positive de ce test et préciser s'il est efficace.

Partie II

On choisit un échantillon de 20 pièces dans la production de la chaîne, en assimilant ce choix à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de pièces défectueuses dans cet échantillon.
On rappelle que : $p(\mathrm{D}) = 0,05$.

1) Justifier que X suit une loi binomiale et déterminer les paramètres de cette loi.
2) Calculer la probabilité que cet échantillon contienne au moins une pièce défectueuse. On donnera un résultat arrondi au centième.
3) Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat obtenu.

EXERCICE 2

Covoiturage

Partie A

Louise se rend au travail en voiture. Sa collègue Zoé ne possède pas de voiture.

Chaque matin, Louise propose donc à Zoé de l'emmener. Quelle que soit la réponse de Zoé, Louise lui propose de la ramener le soir.

On se place un jour donné. On dispose des informations suivantes :

- la probabilité que Louise emmène Zoé le matin est 0,55 ;
- si Louise a emmené Zoé le matin, la probabilité qu'elle la ramène le soir est 0,7 ;
- si Louise part seule le matin, il y a 24 % de chance qu'elle revienne avec Zoé.

On note M et S les événements suivants :

- M : « Louise emmène Zoé le matin » ;
- S : « Louise ramène Zoé le soir ».

1) Construire un arbre pondéré traduisant la situation.
2) Calculer $p(\mathrm{M} \cap \mathrm{S})$. Traduire ce résultat par une phrase.
3) Démontrer que la probabilité de l'événement S est égale à 0,493.
4) On sait que Louise a ramené Zoé le soir.
   Quelle est la probabilité que Louise l'ait emmenée le matin ?

Partie B

L'entreprise de Zoé affirme que 35 % de ses salariés pratiquent le covoiturage. On interroge alors 254 salariés et on appelle X, la variable aléatoire associée au nombre de salarié pratiquant le covoiturage. X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(254\,;\,0,35)$.

Calculer $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$ et $\sigma(X)$.

EXERCICE 3

Feux tricolores

Un élève se rend à vélo au lycée distant de 3 km de son domicile à une vitesse supposée constante de 15 $\mathrm{km.h^{-1}}$.
Sur le parcours, il rencontre 6 feux tricolores non synchronisés.

Pour chaque feu, la probabilité qu'il soit au vert est $\dfrac{2}{3}$.

Un feu rouge ou orange lui fait perdre une minute et demie. On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de feux verts rencontrés par l'élève sur son parcours et T la variable aléatoire égale au temps en minute mis par l'élève pour aller au lycée.

1) Déterminer la loi de probabilité de X.
2) Exprimer T en fonction de X.
3) Déterminer $\mathrm{E}(T)$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.
4) L'élève part 17 minutes avant le début des cours.
   a) Peut-il espérer être à l'heure ?
   b) Calculer la probabilité qu'il soit en retard.