

Rappels de probabilité

Succession d'épreuves indépendantes.

Loi binomiale

Table des matières

1	Rappels sur les probabilités	2
1.1	Définitions	2
1.2	Loi de probabilité	2
1.3	Loi équiprobable	3
1.4	Variable aléatoire	4
1.5	Probabilité conditionnelle	5
1.6	Probabilités totales	6
1.7	Événements indépendants	6
2	Successions d'épreuves indépendantes	7
2.1	Univers associé à une succession d'épreuves indépendantes	7
2.2	Probabilité d'une succession d'épreuves indépendantes	7
2.3	Épreuve, loi et schéma de Bernoulli	7
2.4	Loi binomiale de paramètres n et p	8
2.5	Vérification par l'expérience de la loi binomiale	9
2.6	Représentation de la loi binomiale	10
2.7	Espérance, variance et écart type	11
2.8	Problèmes de seuil	12

-

1 Rappels sur les probabilités

1.1 Définitions

Définition 1 : Espace de calcul de probabilités discrètes

Expérience aléatoire : Protocole précis qui vérifie les conditions suivantes :
non prévisible, d'issues possibles connues et renouvelable dans des conditions identiques.

À partir d'une expérience aléatoire, on définit l'espace probabilisé par :

L'univers Ω : Ensemble (discret et fini) des issues possibles : $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

Les parties de Ω , noté $\mathcal{P}(\Omega)$. les éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$ sont appelé **événements**.

Les événements **élémentaires** sont les singletons de $\mathcal{P}(\Omega)$

L'événement **contraire** de A, noté \bar{A} est le complémentaire de A dans Ω .

Deux événements A et B sont **incompatibles** si $A \cap B = \emptyset$.

L'événement certain est Ω et l'événement impossible est l'ensemble vide, \emptyset .

Une loi de probabilité p : fonction définie de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0 ; 1]$.

qui vérifie les conditions suivantes :

- *masse unitaire* : $p(\Omega) = 1$
- *additivité* : si A et B sont incompatibles alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Exemples :

- 1) On lance un dé cubique : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
 - Soit les événements : A « obtenir un nombre impair » et B « obtenir un 6 ».
 $A = \{1, 3, 5\}$ et $\bar{A} = \{2, 4, 6\}$.
 $B = \{6\}$ est un événement élémentaire.
A et B sont incompatibles, car $A \cap B = \emptyset$, et donc $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.
- 2) On tire successivement, sans remise, deux boules d'une urne qui en contient 6 :
 - $\Omega = \{(b_i, b_j), i, j \in \llbracket 1, 6 \rrbracket \text{ et } i \neq j\}$. Il y a $6 \times 5 = 30$ issues
- 3) On distribue 5 cartes à jouer d'un jeu de 32 :
 - Ω possède (tirages simultanés) $\binom{32}{5} = 201\,376$ éléments.
- 4) Dans lycée, on choisit un lycéen au hasard et l'on relève son sexe et sa classe.
 - $\Omega = \{(F, 2^e), (F, 1^re), (F, T^le), (M, 2^e), (M, 1^re), (M, T^le)\}$

1.2 Loi de probabilité

Théorème 1 : Soit p une loi de probabilité, on a alors :

$$\bullet p(e_1) + p(e_2) + \dots + p(e_n) = \sum_{i=1}^n p(e_i) = 1 \qquad \bullet p(\emptyset) = 0$$

Pour tous événements A et B, on a les relations :

$$\bullet p(\bar{A}) = 1 - P(A) \qquad \bullet p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Exemples :

- 1) On lance un dé truqué. Après un relevé statistique, on a pu déterminer que les probabilités d'apparition de chaque face sont telles que :

$$p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) \quad \text{et} \quad p(6) = 3p(1)$$

Déterminer la loi de probabilité p .

$$\begin{cases} p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = 1 \\ p(6) = 3p(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8p(1) = 1 \\ p(6) = 3p(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p(1) = \frac{1}{8} \\ p(6) = \frac{3}{8} \end{cases}$$

On obtient la loi de probabilité :

e_i	1	2	3	4	5	6
$p(e_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$

- 2) On donne : $p(A) = 0,3$, $p(A \cup B) = 0,7$ et $p(A \cap B) = 0,2$. Calculer $p(\bar{B})$
- $$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \Leftrightarrow p(B) = p(A \cup B) - p(A) + p(A \cap B)$$
- $$p(B) = 0,7 - 0,3 + 0,2 = 0,6 \quad \text{d'où} \quad p(\bar{B}) = 1 - p(B) = 1 - 0,6 = 0,4$$

1.3 Loi équiprobable

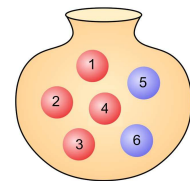
Théorème 2 : Une loi de probabilité est équiprobable si chaque événement élémentaire a la même probabilité d'apparition.

Si $|\Omega| = n$ alors pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $p(e_i) = \frac{1}{n}$.

et pour tout événement A on a : $p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$.

Remarque : Lorsque la loi de probabilité est équiprobable, le calcul de la probabilité d'un événement revient à un problème de dénombrement.

Exemple : Une urne contient 6 boules : 4 rouges (numérotées de 1 à 4) et 2 bleues (numérotées 5 et 6). On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne et on note sa couleur. Calculer la probabilité des événements suivants :



R « tirer deux boules rouges » et C « tirer deux boules de même couleur ».

⚠ Il est important, afin de se placer dans un cas d'équiprobabilité, de numéroter les boules et que ces boules soient indiscernables au toucher. En effet selon qu'elle rouge ou bleue, une boule n'a pas la même probabilité d'apparition.

C'est un tirage simultané donc des combinaisons d'où : $p(R) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

Si on appelle B « obtenir deux boules bleues » : $p(B) = \frac{1}{\binom{6}{2}} = \frac{1}{15}$

$p(C) = p(R \cup B) = p(R) + p(B) = \frac{2}{5} + \frac{1}{15} = \frac{7}{15}$ (R et B incompatibles)

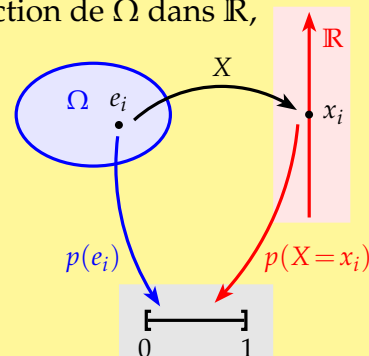
1.4 Variable aléatoire

Définition 2 : Une **variable aléatoire** X est une fonction de Ω dans \mathbb{R} , qui à chaque issue e_i associe un réel x_i .

Une loi de probabilité p de X est une fonction de \mathbb{R} dans $[0;1]$ qui à x_i associe la probabilité $p(X=x_i) = p_i$

L'**espérance mathématique** de X est le réel noté $E(X)$ définie par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n$$



La **variance** et l'**écart-type** de X sont les réels notés $V(X)$ et $\sigma(X)$ définies par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - E^2(X) \quad \text{et} \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

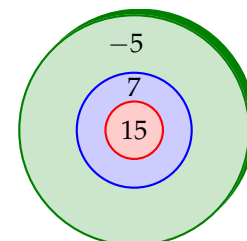
Remarque : L'espérance mathématique correspond à une moyenne des valeurs x_i , pondérées par les probabilités de la loi p définie sur X . Si X représente le gain pour un jeu, $E(X)$ représente le gain moyen que peut espérer le joueur.

Pour le joueur :

$E(X) > 0$: jeu favorable, $E(X) < 0$: jeu défavorable, $E(X) = 0$: jeu équitable.

Exemple : La cible, d'un jeu de fléchettes, est constituée de disques de rayons de 5, 10 et 20 cm.

Un joueur atteint toujours la cible et on admet que la probabilité qu'il atteigne une zone est proportionnelle à son aire. Lorsqu'il atteint la zone rouge, il gagne 15 €, la couronne bleue 7 € et perd 5 € pour la zone verte.



Soit X la variable aléatoire qui indique le gain du joueur.

- La loi de probabilité de X .

Calcul des aires de la cible et des trois zones en cm^2 :

Cible : S	Zone rouge : S_r	Zone bleue : S_b	Zone verte : S_v
$\pi \times 20^2 = 400\pi$	$\pi \times 5^2 = 25\pi$	$\pi \times (10^2 - 5^2) = 75\pi$	$\pi \times (20^2 - 10^2) = 300\pi$

On obtient les probabilités suivantes :

$$p(X=15) = \frac{25\pi}{400\pi} = \frac{1}{16} \quad p(X=7) = \frac{75\pi}{400\pi} = \frac{3}{16} \quad p(X=-5) = \frac{300\pi}{400\pi} = \frac{3}{4}$$

x_i	-5	7	15
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$

D'où la loi de probabilité de X :

- Espérance mathématique de X : gain moyen.

$$E(X) = -5 \times \frac{3}{4} + 7 \times \frac{3}{16} + 15 \times \frac{1}{16} = \frac{-60 + 21 + 15}{16} = -\frac{24}{16} = -\frac{3}{2} = -1,5$$

$E(X) < 0$, défavorable au joueur. Le joueur perd en moyenne 1,5 €.

- Variance et l'écart type de X : dispersion du gain

$$V(X) = (-5)^2 \times \frac{3}{4} + 7^2 \times \frac{3}{16} + 15^2 \times \frac{1}{16} - \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{300 + 147 + 225 - 36}{16} = \frac{159}{4}$$

$$V(X) = 39,75 \quad \text{ainsi} \quad \sigma(X) = \sqrt{39,75} \approx 6,30 \quad \text{écarts moyens de gain d'un joueur}$$

1.5 Probabilité conditionnelle

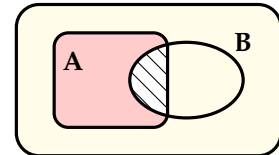
Definition 3 : La probabilité de B sachant que A est réalisé, notée $p_A(B)$ vaut :

$$p(A) \neq 0 \quad \text{et} \quad p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Remarque : Proportion de la part hachurée de B dans A.

$p_A(B)$: part de B dans A

$$p_A(B) = \frac{\text{Nb de éléments communs à A et B}}{\text{Nb de éléments de A}} = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$



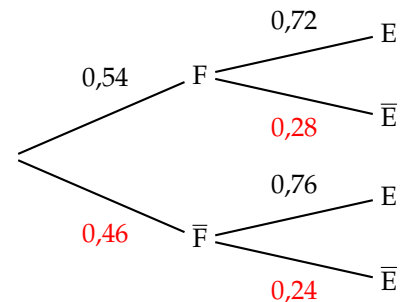
Exemple : Dans un lycée 54 % des élèves sont des filles dont 72 % sont externes. De plus, 76 % des garçons sont externes. On choisit un élève au hasard.

On pose :

- F : « l'élève choisi est une fille »
- E : « l'élève choisi est externe »

On traduit les données à l'aide de probabilités :

$$p(F) = 0,54, \quad p_F(E) = 0,72, \quad p_{\bar{F}}(E) = 0,76$$



Pour remplir et utiliser un arbre, on a les propriétés suivantes :

- Sur chaque branche de l'arbre, on écrit les probabilités correspondantes (attention pas de pourcentage).
- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1 (loi des nœuds).
- Le produit des probabilités inscrites sur chaque branche d'un chemin donne la probabilité de l'intersection des événements placés sur ce chemin.

La probabilité d'avoir une fille externe :

$$p(F \cap E) = p(F) \times p_F(E) = 0,54 \times 0,72 = 0,3888$$

- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui aboutissent à cet événement. La probabilité d'avoir un élève externe :

$$\begin{aligned} p(E) &= p(F \cap E) + p(\bar{F} \cap E) = p(F) \times p_F(E) + p(\bar{F}) \times p_{\bar{F}}(E) \\ &= 0,54 \times 0,72 + 0,46 \times 0,76 = 0,7384 \end{aligned}$$

1.6 Probabilités totales

Définition 4 : Les parties A_1, A_2, \dots, A_n forme une partition de l'univers Ω , si les événements A_i sont incompatibles deux à deux et si leur union est égale à Ω .

Remarque : Le cas le plus fréquent est la partition A et \bar{A} .

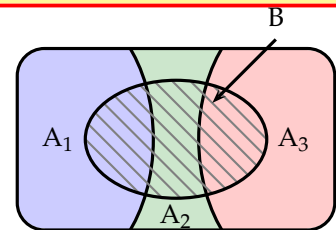
Théorème 3 : Probabilités totales

Soit A_1, A_2, \dots, A_n une partition de l'univers Ω alors, pour tout événement B :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)$$

Exemple : Pour une partition de Ω en : A_1, A_2 et A_3 .

$$p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + p(A_3 \cap B)$$



1.7 Événements indépendants

Définition 5 : Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B) \quad \text{ou} \quad p_A(B) = p(B)$$

Remarque : A et B sont indépendants car, que A soit réalisé ou non, cela n'influe pas sur la probabilité de B : $p_A(B) = p(B)$.

Exemple : Un appareil ménager peut présenter après sa fabrication deux types de défauts : un défaut d'apparence (A) et un défaut de fonctionnement (F).

La probabilité que l'appareil présente un défaut d'apparence vaut $0,02$ et la probabilité que l'appareil présente au moins l'un des deux défauts vaut $0,069$.

On suppose que les deux types de défauts sont indépendants.

On choisit un des appareils.

Quelle est la probabilité que l'appareil présente le défaut F ?



On traduit l'énoncé en probabilités : $p(A) = 0,02$ et $p(A \cup F) = 0,069$.

A et F indépendants, donc $p(A \cap F) = p(A) \times p(F)$

$$\begin{aligned} p(A \cup F) &= p(A) + p(F) - p(A \cap F) = p(A) + p(F) - p(A) \times p(F) \\ &= p(A) + p(F)[1 - p(A)] \end{aligned}$$

$$p(F) = \frac{p(A \cup F) - p(A)}{1 - p(A)} = \frac{0,069 - 0,02}{1 - 0,02} = \frac{0,049}{0,98} = 0,05$$

2 Successions d'épreuves indépendantes

2.1 Univers associé à une succession d'épreuves indépendantes

Définition 6 : Soit une succession de n épreuves indépendantes dont les univers associés sont respectivement $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$.

L'univers associé Ω à cette succession de n épreuves est le produit cartésien :

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n$$

Remarque : Un élément de l'univers Ω est donc un n -upplet : (x_1, x_2, \dots, x_n) .

Souvent, il s'agit de la même épreuve, d'univers Ω_1 que l'on répète n fois de façon identique et indépendante : $\Omega = \Omega_1^n$, les n -upplets sont alors des n -listes

Exemple : On lance successivement un dé tétraédrique numéroté de 1 à 4 et un dé normal à 6 faces. Le résultat du premier dé n'a pas d'influence sur le résultat du deuxième dé donc les épreuves sont indépendantes.

L'univers est donc : $\Omega = \{1, 2, 3, 4\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Le couple $(3, 5)$ est une issue possible contrairement à $(5, 3)$ qui est impossible.

2.2 Probabilité d'une succession d'épreuves indépendantes

Théorème 4 : Soit une succession de n épreuves **indépendantes** de lois de probabilité p_1, p_2, \dots, p_n . Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ une issue possible alors :

$$p(x) = p_1(x_1) \times p_2(x_2) \times \dots \times p_n(x_n)$$

Démonstration : Application de la probabilité de n événements indépendants.

Remarque : Pour n épreuves identiques, on a une seule loi de probabilité p_1 pour les n expériences d'où : $p(x) = p_1(x_1) \times p_1(x_2) \times \dots \times p_1(x_n)$

Exemple : Dans l'exemple précédent, la probabilité de l'événement $A = \{(3, 5)\}$,

avec des dés bien équilibrés : $p(A) = p_1(3) \times p_2(5) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$

⚠ Si les n épreuves ne sont pas indépendantes, la probabilité d'une issue se détermine à l'aide des probabilités conditionnelles.

2.3 Épreuve, loi et schéma de Bernoulli

Définition 7 : Épreuve de Bernoulli

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire qui admet exactement deux issues : succès ou échec.

Exemple : On lance un dé à 6 faces et l'on appelle succès « obtenir un six » et échec le cas contraire.

Théorème 5 : Loi de Bernoulli

Soit X la variable aléatoire associée à une épreuve de Bernoulli qui prend la valeur 1 pour un succès et 0 pour un échec. Soit p la probabilité de succès.

La loi de probabilité de X est appelée loi de Bernoulli :

Elle est notée $\mathcal{B}(p)$.

x_i	0	1
$p(X = x_i)$	$1 - p$	p

On a alors : $E(X) = p$, $V(X) = p(1 - p)$ et $\sigma(X) = \sqrt{p(1 - p)}$

Démonstration : $E(X) = (1 - p) \times 0 + p \times 1 = p$

$V(X) = (1 - p) \times 0^2 + p \times 1^2 - p^2 = p(1 - p)$ d'où $\sigma(X) = \sqrt{p(1 - p)}$

Exemple : La loi de Bernoulli $\mathcal{B}\left(\frac{1}{6}\right)$ de l'exemple précédent :

$$E(X) = \frac{1}{6} , \quad V(X) = \frac{5}{36} \quad \text{et} \quad \sigma(X) = \frac{\sqrt{5}}{6}$$

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

Définition 8 : Schéma de Bernoulli

La répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes est appelée schéma de Bernoulli d'ordre n et de paramètre p .

Exemple : 5 lancers successifs, identiques et indépendants, d'un dé à 6 faces en considérant comme succès « obtenir un six » est un schéma de Bernoulli d'ordre 5 et de paramètre $\frac{1}{6}$.

2.4 Loi binomiale de paramètres n et p **Théorème 6 : Loi binomiale**

Dans un schéma de Bernoulli d'ordre n et de paramètre p , la loi de probabilité de la variable X qui à chaque issue associe le nombre k de succès est définie par :

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

On dit alors que la variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$

Démonstration : Le coefficient $\binom{n}{k}$ correspond au nombre de choix pour placer k succès sur n expériences. Il s'agit du nombre de combinaisons à k éléments (k succès) dans un ensemble de n éléments (n expériences).

Ensuite pour une combinaison donnée, on applique la formule de la probabilité d'une succession de n épreuves indépendantes :

$$\underbrace{p \times p \times \dots \times p}_k \text{ succès} \times \underbrace{(1 - p) \times (1 - p) \times \dots \times (1 - p)}_{n-k \text{ échecs}}$$

Exemple : On lance 10 fois de suite un dé cubique.

Quelle est la probabilité d'obtenir :

- 1) **exactement** 3 fois un six?
- 2) **au moins** 2 fois un six?
- 3) **entre** 2 et 5 fois un six?



Contextualisation : On lance un dé cubique bien équilibré et on appelle succès « obtenir un six » de probabilité $\frac{1}{6}$. On réitère 10 fois cette expérience de façon identique et indépendante et l'on appelle X la v.a. donnant le nombre de succès.

X suit alors la loi binomiale $\mathcal{B}\left(10, \frac{1}{6}\right)$.

$$1) p(X = 3) = \binom{10}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^7 \approx 0,1550 \quad \text{calculatrice: binomFdp}(10, 1/6, 3)$$

$$2) p(X \geq 2) = p(X = 2) + \dots + p(X = 10) = 1 - p(X \leq 1) \approx 0,5155.$$

Calculatrice : Pour obtenir cette probabilité, on passe par la deuxième expression où $p(X \leq 1)$ correspond à la fonction de répartition de la loi binomiale : binomRép. On tape : $1 - \text{binomFRép}(10, 1/6, 1)$


$$3) p(2 \leq X \leq 5) = p(X = 2) + \dots + p(X = 5) = p(X \leq 5) - p(X \leq 1) \approx 0,5130.$$

Calculatrice : on tape $\text{binomFRép}(10, 1/6, 5) - \text{binomFRép}(10, 1/6, 1)$

2.5 Vérification par l'expérience de la loi binomiale

Si l'on cherche à vérifier par l'expérience ces probabilités, il est nécessaire d'effectuer ces 10 lancers un grand nombre de fois, par exemple 10 000 fois. On a recours à une simulation avec algorithme. La fonction *random* qui signifie « hasard » en anglais, permet de générer un nombre pseudo aléatoire dans l'intervalle $]0 ; 1[$. C'est l'une des premières fonctions informatiques créée au début des années 50.

Pour générer un nombre entier entre 1 et 6, simulation d'un lancer de dé, on utilise la fonction `randint(1,6)` dans le module `random`.

Pour vérifier $p(X = x)$ pour 10 lancers de dé, la fonction `simbinom(x)` en Python  permet après 10 000 fois 10 lancers de dé, de donner la proportion où $X = x$ est réalisé.

On boucle deux fois, sur i pour les 10 000 expériences et sur j pour le 10 lancers de dé.

```
from random import*
def simbinom(x):
    k=0
    for i in range(10000):
        X=0
        for j in range(10):
            r=randint(1,6)
            if r==6:
                X+=1
        if X==x:
            k+=1
    return k/10000
```

À chaque boucle sur j , on incrémente X , après les 10 lancé si $X = x$ on incrémente k qui compte le nombre d'expérience où la condition $X = x$ est réalisée.

Comme il s'agit de hasard, le résultat n'est pas le même à chaque fois mais doit être proche du résultat théorique. Pour $x = 3$, on a trouvé 0,1550.

Quelques résultats pour `simbinom(3)` : 0,1538 , 0,1566 , 0,1571 , 0,1525.

Remarque : À titre indicatif $\text{randint}(1,6) = E[6 * \text{random}()] + 1$.

2.6 Représentation de la loi binomiale

Représentation symétrique

On lance 8 fois une pièce de monnaie. Déterminer et représenter la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui représente le nombre de « piles » obtenus.

Les 8 lancers sont indépendants car la pièce est lancée toujours de la même façon. La probabilité sur un lancer d'obtenir « pile » est de 0,5 (pièce bien équilibrée).

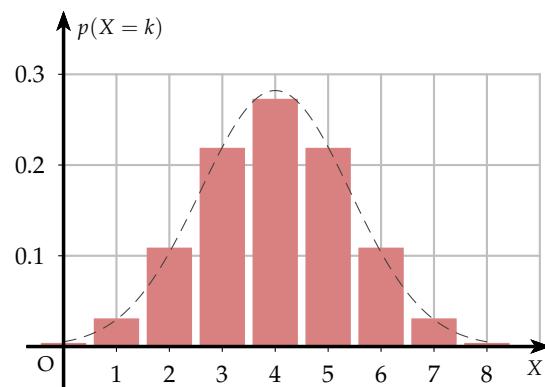
On obtient alors : $p(X = k) = \binom{8}{k} 0,5^k 0,5^{8-k} = \binom{8}{k} 0,5^8$

Avec la calculatrice, la fonction binomFdp(8, 0.5) donne les valeurs pour $k \in \llbracket 0, 8 \rrbracket$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$p(X = k)$	0,004	0,031	0,109	0,219	0,273	0,219	0,109	0,031	0,004

On obtient la représentation de la loi binomiale $\mathcal{B}(8; 0,5)$ suivante :

La ligne en pointillé correspond à une distribution continue de la loi binomiale : la loi normale (courbe en cloche).



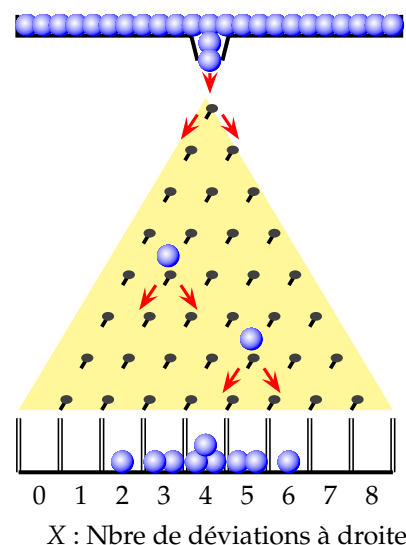
Vérification mécanique de la distribution binomiale : la planche Galton

La planche de Galton est constituée de rangées horizontales de clous décalées d'un demi-cran par rapport à la précédente. On lâche les billes au sommet et celles-ci rebondissent de clou en clou jusqu'à la base de la planche où elles sont collectées dans des réservoirs.

Si le diamètre des billes et l'écartement entre les clous sont correctement choisis, une bille a exactement autant de chance de rebondir à droite ou à gauche du clou. Ci-contre, une planche de Galton avec 8 rangées de clous correspondant à notre expérience de 8 lancers de pièce. La variable aléatoire X associée à chaque boule le nombre de déviations à droite à l'issue des 8 rangées de clous.

Pour réaliser cette expérience : [cliquer ici](#)

Prendre par exemple 1000 boules et 8 rangées de clous.



Remarque : Cette distribution est symétrique car la probabilité de succès est égale à la probabilité d'échec.

Représentation asymétrique.

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : 4 boules sont rouges et les autres sont noires. On tire successivement, avec remise, 6 boules de l'urne.

Déterminer et représenter la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui représente le nombre de boules rouges obtenues.

Les 6 lancers sont indépendants car la boule est remise dans l'urne à chaque fois. La probabilité sur un tirage d'obtenir une boule rouge est de 0,4. D'où :

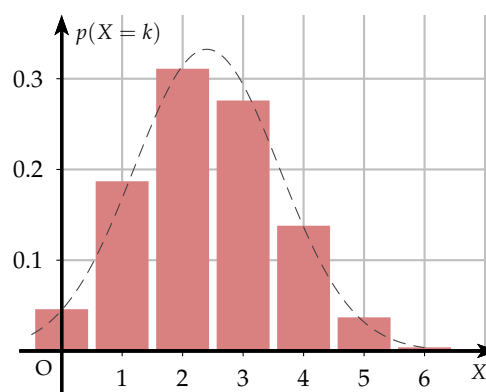
$$p(X = k) = \binom{6}{k} 0,4^k 0,6^{6-k}$$

Avec la calculatrice, la fonction binomFdp(6,0.4) donne les valeurs pour $k \in \llbracket 0, 6 \rrbracket$

k	0	1	2	3	4	5	6
$p(X = k)$	0,046	0,187	0,311	0,276	0,138	0,037	0,004

On obtient la représentation de la loi binomiale $\mathcal{B}(6; 0,4)$ suivante :

La ligne en pointillé correspond à une distribution continue de la loi binomiale : la loi normale (courbe en cloche).

**2.7 Espérance, variance et écart type**

Théorème 7 : Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

On a les relations : $E(X) = np$, $V(X) = np(1-p)$, $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

Remarque : Ce théorème sera montré dans le chapitre suivant.

Exemple : Une urne contient 10 boules, indiscernables au toucher : 4 boules sont rouges et les autres sont noires. On tire successivement, avec remise, 6 boules de l'urne. Quel nombre moyen de boules rouges peut-on espérer ? Avec quelle variance et quel écart type.

$$E(X) = 6 \times 0,4 = 2,4 ; V(X) = 6 \times 0,4 \times 0,6 = 1,44 ; \sigma(X) = \sqrt{1,44} = 1,2$$

2.8 Problèmes de seuil

Dans une entreprise, 400 employés ont réservé un repas au self de l'entreprise. Les statistiques montrent que lorsqu'un employé a réservé, 6 % ne mange pas à la cantine. On appelle X le nombre de personnes mangeant réellement au self

- 1) a) Montrer que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
b) Déterminer l'espérance et l'écart type de X .
- 2) Le gestionnaire du self ne voulant pas gâcher de nourriture souhaite savoir le nombre minimal k de repas à préparer tout en restant sûr à au moins 95 % que tous les employés se présentant auront un repas.
 - a) À l'aide de la calculatrice, déterminer k .
 - b) Même question avec un seuil de 99 %.

- 1) a) Soit l'expérience, on tire au hasard un employé ayant réservé un repas au self. Il a une probabilité de 0,94 d'y manger réellement que l'on appelle probabilité de succès. On répète 400 fois cette expérience, que l'on assimile à des tirages avec remise, de façon identique et indépendante (schéma de Bernoulli), X est alors associé au nombre de succès et suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(400 ; 0,94)$.

b) On a : $E(X) = 400 \times 0,94 = 376$ et $\sigma(X) = \sqrt{400 \times 0,94 \times 0,06} = 4,8$

- 2) a) On doit déterminer k tel que : $p(X \leq k) \geq 0,95$.

À l'aide de la calculatrice :

- on rentre la fonction : $Y_1 = \text{binomFRép}(400, 0,94, X)$.
- On établit un tableau de valeur de Y_1 de valeur initiale 376 avec un pas de 1.
- On choisit la valeur de X à partir de laquelle $Y_1 \geq 0,95$

On trouve alors $k = 384$

- b) Pour $p(X \leq k) \geq 0,99$, on trouve $k = 386$

X	Y ₁
379	0.7651
380	0.8278
381	0.8793
382	0.9194
383	0.949
384	0.9695
385	0.9828
386	0.991
387	0.9956
388	0.998
389	0.9992

La compagnie Oui SNCF doit remplir un train de 180 places. Comme elle sait que le taux de défections habituel (indépendantes les unes des autres) des personnes ayant acheté un billet est de 8 %, elle décide de mettre plus de 180 billets en vente. On appelle n le nombre de billet mis en vente et X le nombre de passagers prenant réellement le train.

- 1) a) Montrer que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
b) Déterminer l'espérance de X en fonction de n .
- 2) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le nombre de billets à vendre pour être sûr au seuil de 95 % de ne pas vendre trop de billets que ne peut contenir le train.

- 1) a) Soit l'expérience, on tire au hasard une réservation. Elle a une probabilité de 0,92 d'être honorée que l'on appelle probabilité de succès. On répète n fois

cette expérience, que l'on assimile à des tirages avec remise, de façon identique et indépendante (schéma de Bernoulli), X est alors associé au nombre de succès et suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(n; 0,92)$.

b) On a : $E(X) = 0,92n$.

2) On doit déterminer n tel que : $p(X \leq 180) \geq 0,95$.

À l'aide de la calculatrice :

- on rentre la fonction : $Y_1 = \text{binomFRép}(X, 0,92, 180)$.
- On établit un tableau de valeur de Y_1 de valeur initial 180 avec un pas de 1.
- On choisit la valeur de X jusqu'à laquelle $Y_1 \geq 0,95$

On trouve alors $n = 189$

X	Y_1
184	0.9998
185	0.9993
186	0.9977
187	0.9939
188	0.9856
189	0.97
190	0.9438
191	0.904
192	0.8488
193	0.7781
194	0.6941