Contrôle de mathématiques

Lundi 12 octobre 2020

Exercice 1

Produits de termes **(9 points)**

Soit la suite (u_n) définie, pour $n \geqslant 1$, par : $u_n = \dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}$.

La suite (v_n) est définie pour $n \geqslant 1$ par : $v_n = u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n$

1) Déterminer u_1, u_2, u_3 puis v_1, v_2, v_3.

2) a) Montrer que, pour $n \geqslant 1$, $u_n = 1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

   b) Montrer que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2}$. En déduire la monotonie de la suite (u_n).

   c) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $0 < u_n < 1$.

3) a) Justifier que, pour tout $n \geqslant 1$, $v_{n+1} = v_n \times u_{n+1}$.
   En déduire que la suite (v_n) est décroissante.

   b) On considère la fonction $v(n)$ en Python incomplète. Recopier et compléter cet algorithme pour qu'il retourne la valeur de v_n.

```python
def v(n):
    v=3/4
    for i in range(2,n+1):
        v=v*...*(...+2)/(...+1)**2
    return v
```

   Rentrer cet algorithme dans la calculatrice puis recopier et compléter le tableau :

n	3	10	100	1000
$v(n)$	0,625			

   c) Conjecturer la convergence de la suite (v_n).

Exercice 2

Somme de termes **(4 points)**

1) Soit la somme $S = 6 + 12 + 18 + 24 + \cdots + 2520$

   a) Déterminer le nombre de termes de la somme S.

   b) Calculer la valeur de la somme S en rappelant la formule utilisée.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$ et la somme $S_n = 9 + \dfrac{9}{4} + \dfrac{9}{4^2} + \cdots + \dfrac{9}{4^n}$

   a) Déterminer l'expression de S_n en fonction de n. On rappellera la formule utilisée.

   b) Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} S_n$.

EXERCICE 3

Population de tigres **(5 points)**

On s'intéresse à l'évolution d'une population de tigres dans une réserve en naturelle.
En 2019, il y avait 100 tigres. Une étude à montré que chaque année, 10 % de la population de tigres meurt. En conséquence on introduit, chaque année, 5 nouveaux tigres à la réserve. On note u_n le nombre de tigres en $2019 + n$.

1) Déterminer le nombre de tigres dans la réserve en 2020.
2) Donner la valeur de u_0 et justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,9u_n + 5$.
3) On pose $v_n = u_n - 50$
   a) Montrer que (v_n) est géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b) Déterminer l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.
   c) En déduire la limite de la suite (u_n).
   d) Interpréter dans le contexte les variations et la limites de la suite (u_n).

EXERCICE 4

Récurrence **(2 points)**

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$

1) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 7 \times 2^n - 3$
2) Déterminer la limite de la suite (u_n)