Correction contrôle de mathématiques

Du lundi 12 octobre 2020

EXERCICE 1

Produits de termes **(9 points)**

1) On trouve : $u_1 = \dfrac{3}{4}$, $u_2 = \dfrac{8}{9}$, $u_3 = \dfrac{15}{16}$

$v_1 = u_1 = \dfrac{3}{4}$, $v_2 = u_1 \times u_2 = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{8}{9} = \dfrac{2}{3}$, $v_3 = u_1 \times u_2 \times u_3 = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{15}{16} = \dfrac{5}{8}$.

2) a) $u_n = \dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \dfrac{(n^2+2n+1)-1}{(n+1)^2} = \dfrac{(n+1)^2}{(n+1)^2} - \dfrac{1}{(n+1)^2} = 1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

b) $u_{n+1} - u_n = \cancel{1} - \dfrac{1}{(n+2)^2} - \cancel{1} + \dfrac{1}{(n+1)^2} = \dfrac{-n^2-2n-1+n^2+4n+4}{(n+1)^2(n+2)^2} = \dfrac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2}$.

$\forall n \geqslant 1,\ \ 2n+3 > 0 \ \Rightarrow\ u_{n+1} - u_n > 0$ La suite (u_n) est croissante.

c) $\forall n \geqslant 1,\ \ -\dfrac{1}{(n+1)^2} < 0 \overset{+1}{\Rightarrow} 1 - \dfrac{1}{(n+1)^2} < 1 \ \Rightarrow\ u_n < 1$

$\forall n \geqslant 1,\ (n+1)^2 \geqslant 4 \overset{\uparrow(-1)}{\Rightarrow} \dfrac{1}{(n+1)^2} \leqslant \dfrac{-}{4} \overset{\times(-1)}{\Rightarrow} -\dfrac{1}{(n+1)^2} \geqslant -\dfrac{1}{4} \overset{+1}{\Rightarrow}$

$1 - \dfrac{1}{(n+1)^2} \geqslant \dfrac{3}{4} > 0 \ \Rightarrow\ u_n > 0$

Conclusion : $\forall n \geqslant 1,\ \ 0 < u_n < 1$.

3) a) $v_{n+1} = \underbrace{u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_n}_{=v_n} \times u_{n+1} = v_n \times u_{n+1}$.

$\forall n \geqslant 1,\ v_{n+1} - v_n = v_n \times u_{n+1} - v_n = v_n(u_{n+1} - 1)$

$$\left.\begin{array}{l} u_n > 0 \overset{\text{produit}}{\Rightarrow} v_n > 0 \\ u_{n+1} < 1 \overset{-1}{\Rightarrow} u_{n+1} - 1 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow\ v_n(u_{n+1}-1) < 0 \ \Rightarrow\ v_{n+1} - v_n < 0.$$

La suite (v_n) est décroissante.

b) On obtient l'algorithme complété suivant :

n	3	10	100	1000
$v(n)$	0,625	0,545	0,505	0,500

```
def v(n):
    v=3/4
    for i in range(2,n+1):
        v=v*i*(i+2)/(i+1)**2
    return v
```

c) Conjecture : La suite (v_n) converge vers 0,5.

EXERCICE 2

Somme de termes **(4 points)**

1) a) S est la somme des premiers termes d'une suite arithmétique de raison $r = 6$.

Le nombre de termes N de la somme S : $N = \dfrac{2520-6}{6} + 1 = 420$.

b) $S = \text{Nbre de termes} \times \dfrac{\sum \text{termes extrèmes}}{2} = 420 \times \dfrac{6 + 2520}{2} = 530\,460.$

2) S_n est la somme des $(n+1)$-ièmes premiers termes d'une suite (u_n) géométrique de raison $q = \dfrac{1}{4}$ et de premier terme $u_0 = 9$.

3) a) $S_n = u_0 \times \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 9 \times \dfrac{1 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \dfrac{1}{4}} = 12\left[1 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}\right]$

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1} = 0$ car $-1 < \dfrac{1}{4} < 1$. Par somme et produit : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 12$

Exercice 3

Population de tigres **(5 points)**

1) Nombre N de tigres dans la réserve en 2020 : $N = 0,9 \times 100 + 5 = 95$.

2) $u_0 = 100$, comme 10 % de tigres meurent d'une années à l'autre, il en reste 90 % auquel on rajoute 5, ce qui donne pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,9u_n + 5$.

3) a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 50 = 0,9u_n + 5 - 50 = 0,9u_n - 45 = 0,9(u_n - 50) = 0,9v_n$.

La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,9$ et de 1er terme $v_0 = u_0 - 50 = 50$.

b) $v_n = v_0\, q^n = 50(0,9)^n$ donc $u_n = 50(0,9)^n + 50$

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,9^n = 0$ car $-1 < 0,9 < 1$, par produit et somme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 50$.

d) La population de tigre va décroître jusqu'à se stabiliser à 50 après un certain nombre d'années.

Exercice 4

Récurrence **(2 points)**

1) **Initialisation :** $n = 0$, $7 \times 2^0 - 3 = 7 - 3 = 4 = u_0$. La proposition est initialisée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n = 7 \times 2^n - 3$, montrons que $u_{n+1} = 7 \times 2^{n+1} - 3$.

$$u_{n+1} = 2u_n + 3 \overset{\text{HR}}{=} 2(7 \times 2^n + 3) - 3 = 7 \times 2^{n+1} + 6 - 3 = 7 \times 2^{n+1} + 3$$

La proposition est héréditaire.

Par initialisation et hérédité : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 7 \times 2^n + 3$.

2) $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$ car $2 > 1$. Par produit et somme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$