Correction du devoir
du lundi 2 novembre 2020

EXERCICE 1

Résonnement par récurrence. **(4 points)**

1) $u_1 = 3u_0 + 3 = 3$, $u_2 = 3u_1 - 2 + 3 = 10$ et $u_3 = 3u_2 - 4 + 3 = 29$.
⚠ pour calculer u_1, on fait $n = 0$: $u_{0+1} = 3u_0 + 2 \times 0 + 3 = 3$.

2) On peut écrire le programme suivant :

```
def u(n):
    u=0
    for i in range(n):
        u=3*u-2*i+3
    return u
```

ou

```
def u(n):
    u=0
    for i in range(1,n+1):
        u=3*u-2*(i-1)+3
    return u
```

3) **Initialisation :** $n = 0$, $3^0 + 0 - 1 = 1 - 1 = 0 = u_0$. La proposition est initialisée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n = 3^n + n - 1$, montrons que $u_{n+1} = 3^{n+1} + n$.

$u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3 \overset{\text{HR}}{=} 3(3^n + n - 1) + 3 = 3^{n+1} + 3n - 3 - 2n + 3 = 3^{n+1} + n$.

La proposition est héréditaire.

Par initialisation et hérédité : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n + n - 1$.

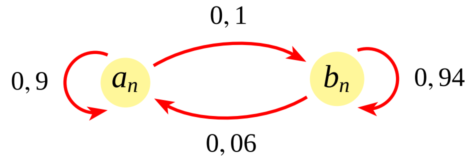
4) $\lim\limits_{n \to +\infty} 3^n = +\infty$ car $3 > 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n - 1 = +\infty$. Par somme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
La suite diverge vers $+\infty$.

EXERCICE 2

Abonnement papier ou numérique **(6 points)**

1) Comme en 2010, le magazine est proposé uniquement en version papier donc :
$a_0 = 1$ et par suite $b_0 = 0$

On peut faire le schéma suivant :



Chaque année, la version papier perd 10 % de ses lecteurs, il lui en reste 90 % et elle récupère 6 % des lecteurs du numérique donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 0,9a_n + 0,06b_n$.

2) Le nombre global d'abonné reste constant, on a : $a_n + b_n = 1 \Leftrightarrow b_n = 1 - a_n$, donc :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 0,9a_n + 0,06(1 - a_n) = 0,9a_n + 0,06 - 0,06a_n = 0,84a_n + 0,06$.

3) a) $c_{n+1} = a_{n+1} - 0,375 = 0,84a_n + 0,06 - 0,375 = 0,84a_n - 0,315 = 0,84\left(a_n - \dfrac{0,315}{0,84}\right)$
$= 0,84a_n - 0,375) = 0,84c_n$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{c_{n+1}}{c_n} = 0,84$, la suite (c_n) est géométrique de raison $q = 0,84$ et de premier terme $c_0 = a_0 - 0,375 = 0,625$.

b) On a alors : $c_n = c_0\, q^n = 0,625\,(0,84)^n$, on en déduit alors :
$a_n = c_n + 0,375 = 0,625\,(0,84)^n + 0,375$ et $b_n = 1 - a_n = 0,625 - 0,625\,(0,84)^n$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,84^n = 0$ car $-1 < 0,84 < 1$, par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0,375$.

4) On peut écrire le programme suivant où l'on trouve $n = 10$ soit en 2020.

```
a=1
b=0
n=0
while a>=b:
    n=n+1
    a=0,84*a+0,06
    b=1-a
print(n)
```

Exercice 3

Limites de suites **(6 points)**

1) $\forall n \in \mathbb{N},\ -\cos 2n \leqslant 1 \overset{-n}{\Rightarrow} -n - \cos 2n \leqslant -n + 1 \Rightarrow u_n \leqslant -n + 1.$
$\lim\limits_{n\to+\infty} -n + 1 = -\infty$, d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

2) $u_n = \dfrac{2n(n+2)}{(n+1)^2} = \dfrac{2n^2+4n}{n^2+2n+1} \overset{\div n^2}{=} \dfrac{2 + \dfrac{4}{n}}{1 + \dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^2}}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} 2 + \dfrac{4}{n} = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^2} = 1$ par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,8^n = 0$ car $-1 < 0,8 < 1$, par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 + 0,8^n = 3$.

Par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

4) $u_n = n^3 - n^2 + 4 = n^3\left(1 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{4}{n^3}\right)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{4}{n^3} = 1$ par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

5) $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{-1}{2n+1} \leqslant \dfrac{(-1)^n}{2n+1} \leqslant \dfrac{1}{2n+1}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{2n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n+1} = 0$, d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

6) $u_n = \dfrac{3^n + 2^n}{4^n} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n + \left(\dfrac{2}{4}\right)^n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ car $-1 < \dfrac{1}{2} < \dfrac{3}{4} < 1$ par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

EXERCICE 4

Vrai-Faux **(4 points)**

1) **Faux**. La suite (u_n) peut converger vers 0. Contre-exemple :
$u_n = \dfrac{1}{n+1}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} -2(n+1) = -\infty$ donc divergente.

2) **Vrai**.
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 2 \overset{\nearrow(-1)}{\Rightarrow} 0 < \dfrac{1}{u_n} \leqslant \dfrac{1}{2} \overset{\times(-2)}{\Rightarrow} -1 \leqslant -\dfrac{2}{u_n} < 0 \Rightarrow v_n \geqslant -1.$

3) **Faux**. Si (u_n) a un signe constant les deux suites ont même variation.
Contre-exemple : soit $u_n = \dfrac{1}{n+1}$, la suite (u_n) est décroissante,
on a alors $v_n = -2(n+1) = -2n-2$, donc la suite (v_n) est décroissante.

4) **Faux**. La suite (u_n) peut diverger sans limite. Contre-exemple :
$u_n = (-1)^n$, la suite (u_n) diverge, on a alors $v_n = -2(-1)^n$, la suite (v_n) diverge aussi.