Correction contrôle de mathématiques
du lundi 30 novembre 2020

EXERCICE 1

Limites **(3 points)**

1) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 7x + 1}{x - 3} \overset{\div x \neq 0}{=} \dfrac{2x - 7 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{3}{x}}$ on a $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} 2x - 7 + \dfrac{1}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} 1 - \dfrac{3}{x} = 1 \end{array}\right\}$ Par quotient $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$item

$g(x) = \dfrac{e^x - 3}{(x-1)^2}$ on a $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1} e^x - 3 = e - 3 < 0 \\ \lim\limits_{x \to 1} (x-1)^2 = 0^+ \end{array}\right\}$ Par quotient $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = -\infty$

2) $h(x) = \sqrt{\dfrac{5}{2 - x}}$ signe de $(2 - x)$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$2 - x$	$+$	0	$-$

$\lim\limits_{x \to 2^-} 2 - x = 0^+$ par quotient $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{5}{2 - x} = +\infty$ or $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Par composition $\lim\limits_{x \to 2^-} h(x) = +\infty$

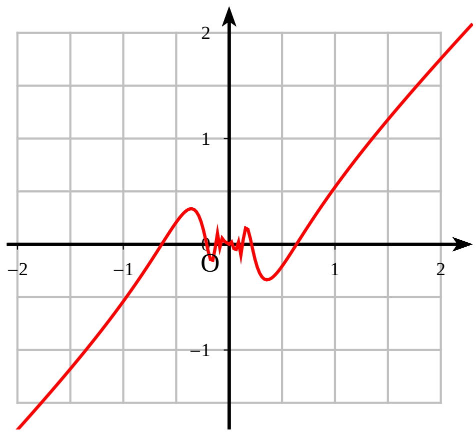
EXERCICE 2

Continuité **(3 points)**

1) Une fonction f est continue en a si, et seulement si, $\lim\limits_{x \to a} = f(a)$.

Cela signifie que la courbe $\mathscr{C}_f$ est en un seul morceau (pas de « cassure » de la courbe).

2) a) On obtient la courbe suivante :



On peut conjecturer que la fonction f est continue en 0 car la courbe n'admet pas de « cassure ».

b) Pour tout réel non nul x, on a :

$-1 \leqslant x \cos \dfrac{1}{x} \leqslant 1 \overset{\times x}{\Leftrightarrow} -|x| \leqslant \cos \dfrac{1}{x} \leqslant |x|$

or $\lim\limits_{x \to 0} -|x| = \lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$,

d'après le théorème des gendarmes

$\lim\limits_{x \to 0} x \cos \dfrac{1}{x} = 0 = f(0)$

EXERCICE 3

Vrai-Faux **(5 points)**

1) **Proposition 1 : fausse**

Contre exemple : $f(x) = -x$. On a : $\forall x \in]0\,;+\infty[$, $-x < 0 < \dfrac{2}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} -x = -\infty$.

2) **Proposition 2 : vraie**

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2+\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2+\dfrac{4}{x} = 2$, d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.

3) **Proposition 3 : vraie** D'après le tableau de variations

- $\forall x \in]-\infty\,;\,0]$, $f(x) < 0$. Donc sur l'intervalle $]-\infty\,;\,0]$, l'équation $f(x) = 1$ est impossible.
- Sur $[1\,;+\infty[$, la fonction f est continue, strictement croissante et 1 est compris entre $f(0) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} = +\infty$, d'après le TVI, l'équation $f(x) = 1$, admet une unique solution.
- Conclusion sur $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution.

4) **Proposition 4 : fausse**

Avec un balayage sur la calculatrice, on trouve $f(0,77) \approx -0,003$ et $f(0,78) \approx +0,035$ donc $0,77 < \alpha < 0,78$, et donc la valeur approchée à 10^{-1} près est 0,8.

Exercice 4

Équation, valeur approchée et limite d'une suite **(9 points)**

Partie A

1) $\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} x+2 = +\infty \\ \end{array}\right. \\ \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} x-4 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \end{array}\right\} \text{Par composition } \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-4} = +\infty \end{array}\right\}$ Par produit et somme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2) $f'(x) = 1\times e^{x-4} + (x+2)\times 1\times e^{x-4} = (x+3)e^{x-3}$.

- $f'(x) = 0 \overset{e^x>0}{\Leftrightarrow} x = -3$
- Signe de $f'(x) =$ signe $(x+3)$ car $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{x-4} > 0$

On obtient le tableau de variations :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-2	$\searrow$	$-e^{-7}-2$	$\nearrow$	$+\infty$

3) a)
- Si $x \in]-\infty\,;-3]$, $f(x) \leqslant -2$. Donc f ne peut s'annuler.
- Sur $[-3\ :\ +\infty[$, f est continue, strictement croissante et change de signe car $f(-3) \approx -2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} = +\infty$, d'après le TVI, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α.
- Conclusion : l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

$f(0) \approx -1,963$ et $f(4) = 4$ donc $f(0)f(4) < 0$ et donc $\alpha \in [0\,;\,4]$.

b) Bien rentrer la fonction dans le programme : $f(x) = (x+2) * \exp(x-4) - 2$.
On trouve alors : $3,069 < \alpha < 3,070$ après 12 boucles.

c) Comme la fonction f est croissante sur $[-3\,;+\infty[$:
si $x < \alpha$, $f(x) < 0$ et si $x > \alpha$, $f(x) > 0$.

Partie B

1) a) D'après la partie A, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geqslant -e^{-7} - 2 > -3$.
Comme $u_0 = 2 > -3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$ on en déduit que $u_n \geqslant -3$.

b) **Initialisation :** $n = 0, \; u_0 = 2 \;\; u_1 = f(u_0) = 4e^{-2} - 2 \approx -1,45$ donc $u_1 \leqslant u_0$.
La proposition est initialisée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_{n+1} \leqslant u_n$, montrons que $u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$.

HR : $u_{n+1} \leqslant u_n$, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant -3$ et d'après la partie A, f est croissante sur $[-3\,;+\infty[$, on a :
$f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \quad \Leftrightarrow \quad u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$. La proposition est héréditaire.

Par initialisation et hérédité : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leqslant u_n$. La suite (u_n) est décroissante.

c) La suite (u_n) est décroissante et minorée par -3, d'après le théorème des suites monotone, la suite (u_n) est convergente vers ℓ.

2) a) $f(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad (x+2)e^{x-4} - 2 - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+2)e^{x-4} - (x+2) = 0 \quad \Leftrightarrow$
$(x+2)(e^{x-4} - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + 2 = 0$ ou $e^{x-4} - 1 = 0$

- $x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2$
- $e^{x-4} - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{x-4} = e^0 \quad \overset{\exp\nearrow}{\Leftrightarrow} \quad x - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4$

$f(x) = x$ admet deux solutions $x = -2$ et $x = 4$

On aurait pu aussi calculer : $f(-2) = 0e^{-6} - 2 = -2$ et $f(4) = 6e^0 - 2 = 6 - 2 = 4$.
Donc -2 et 4 sont solutions de $f(x) = x$.

b) La suite (u_n) est convergente vers ℓ et f est continue sur $\mathbb{R}$ donc d'après le théorème du point fixe, ℓ vérifie l'équation $f(x) = x$.
Comme la suite (u_n) est décroissante et $u_0 = 2$ alors $\ell \leqslant 2$. La seule solution possible de $f(x) = x$ est donc -2. La suite (u_n) converge vers -2.