Correction du devoir
du 4 janvier 2021

EXERCICE 1

QCM justifié **(5 points)**

1) Réponse **c.**

   a. Les suites (u_n) et (v_n) sont géométriques.
   Faux à cause du 1 devant la puissance.

   b. La suite (u_n) est minorée par 1.
   Faux la suite (u_n) est majorée par 1 car $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n \leqslant 1$.

   c. La suite (w_n) converge vers 1.
   Vrai car $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{4}\right)^n = 0$ car $-1 < \dfrac{1}{4} < 1$ donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$.
   D'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 1$.

   d. La suite (w_n) est croissante.
   Faux pas nécessairement contre-exemple $w_n = 1 + \sin n \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$

2) Réponse **b.** car $f'(x) = 1e^{x^2} + x(2x)e^{x^2} = e^{x^2}(1 + 2x^2)$.
   Les autres proposition sont nécessairement fausses.

3) Réponse **c.** car on a, pour $x \neq 0$, $\dfrac{x^2-1}{2x^2-2x+1} = \dfrac{x^2\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)} = \dfrac{1 - \dfrac{1}{x^2}}{2 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}}$ et

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{x^2} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 2 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2} = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Par quotient} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-1}{2x^2-2x+1} = \dfrac{1}{2} \end{array}$$

4) Réponse **c.**

   a. La fonction h est croissante sur l'intervalle $[-1\ ;\ 0]$.
   Faux car la continuité n'implique pas la monotonie.

   b. La fonction h est positive sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$.
   Faux car la fonction h n'est pas nécessairement monotone sur $[-1\ ;\ 0]$ ou sur $[0\ ;\ 1]$ et peut ainsi être négative par endroit.

   c. Il existe au moins un nombre réel α dans l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ tel que $h(\alpha) = 1$.
   Vrai la fonction est continue sur $[0\ ;\ 1]$ et 1 est compris entre $h(0) = 2$ et $h(1) = 0$, d'après le TVI, l'équation $h(x) = 1$ admet au moins une solution $\alpha \in [0\ ;\ 1]$.

   d. L'équation $h(x) = 1$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$.
   Faux car la fonction h n'est pas nécessairement monotone sur $[-1\ ;\ 0]$ ou sur $[0\ ;\ 1]$ et donc l'unicité des solutions sur ces deux intervalle de $h(x) = 1$ n'est pas assurée.

5) Réponse **c.**

a. g admet un maximum en -2.
Faux car il ne faut pas confondre g avec sa dérivée g'.
C'est g' qui admet un maximum en -2.

b. g est croissante sur l'intervalle $[1\,;\,2]$.
Faux car sur $[1\,;\,2]$, $g'(x) \leqslant 0$ donc la fonction g est décroissante.

c. g est convexe sur l'intervalle $[1\,;\,2]$,
Vrai car sur $[1\,;\,2]$, g' est croissante et donc $g''(x) \geqslant 0$.

d. g admet un minimum en 0.
Faux, g admet un maximum en 0 car g' est positive pour $x < 0$ et négative si $x > 0$.

Exercice 2

Fonction ln **(7 points)**

Partie A

1) La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale en A donc $f'\left(\dfrac{1}{e}\right) = 0$.

En prenant le point C(0,3), on a : $f'(1) = \dfrac{-2}{2} = -1$.

2) $T_{\mathrm{B}} : y = f'(1)(x-1) + f(1) \quad\Leftrightarrow\quad y = -1(x-1) + 2 \quad\Leftrightarrow\quad y = -x + 3$

Partie B

1) $f\left(\dfrac{1}{e}\right) = \dfrac{2 + \ln\dfrac{1}{e}}{\dfrac{1}{e}} = e(2 - \ln e) \overset{\ln e = 1}{=} e$ donc $\mathrm{A} \in \mathscr{C}_f$ et

$f(1) = \dfrac{2 + \ln 1}{1} = 2$ donc $\mathrm{B} \in \mathscr{C}_f$.

$f(x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 2 + \ln x = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \ln x = -2 \quad\overset{\ln\ \text{monotone}}{\Leftrightarrow}\quad x = e^{-2} \approx 0,135$.

La courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse e^{-2}.

2) En 0^+, on a

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \ \text{ par somme } \ \lim\limits_{x\to 0^+} 2 + \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0^+ \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Par quotient} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty\end{array}$$

En $+\infty$, $f(x) = \dfrac{2}{x} + \dfrac{\ln x}{x}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Par somme} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0\end{array}$$

3) $f'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{x} \times x - 1(2 + \ln x)}{x^2} = \dfrac{1 - 2 - \ln x}{x^2} = \dfrac{-1 - \ln x}{x^2}$.

4) $f'(x)=0 \iff -1-\ln x=0 \iff \ln x=-1 \iff x=e^{-1}$ (on retrouve le point A).

Comme la fonction ln est croissante sur $]0\,;+\infty[$, la fonction $x\mapsto -1-\ln x$ est décroissante sur $]0\,;+\infty[$, on obtient alors le tableau de variation :

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

5) $$f''(x)=\dfrac{-\dfrac{1}{x}\times x^2-2x(-1-\ln x)}{x^4}=\dfrac{-x+2x(1+\ln x)}{x^4}=\dfrac{x(-1+2+2\ln x)}{x^4}=\dfrac{1+2\ln x}{x^3}$$

f convexe $\iff f''(x)\geqslant 0 \overset{x>0}{\iff} 1+2\ln x\geqslant 0 \iff \ln x\geqslant -\dfrac{1}{2} \overset{\ln\nearrow}{\iff} x\geqslant e^{-\frac{1}{2}}\approx 0,607.$

f est convexe sur $[e^{-\frac{1}{2}}\,;+\infty[$

Exercice 3

Fonction exponentielle **(6 points)**

1) À $t=0$, les baguettes sortent du four donc $f(0)=225$.
La température ambiante est de 25°C donc $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=25$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{t\to+\infty} -6t=-\infty\\ \lim\limits_{t\to-\infty} e^t=0\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{Par composition}\\ \lim\limits_{t\to+\infty} e^{-6t}=0\end{array}\quad\overset{\text{par produit et somme}}{\Rightarrow}\quad \lim_{t\to+\infty} f(t)=b \Rightarrow b=25.$$

$f(0)=225 \iff ae^0+25=225 \iff a=225-25=200.$

On a donc bien $f(t)=200e^{-6t}+25$.

2) La fonction f représentant le refroidissement des baguettes est nécessairement décroissante. On peut le vérifier par la dérivée.
Pour tout $t\in[0\,;+\infty[$, $f'(t)=200(-6)e^{-6t}=-1200e^{-6t}<0$.

Sur $[0\,;+\infty[$, la fonction f est continue (produit de fonctions continues), décroissante (monotone) et 40 est compris entre $f(0)=225$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=25$, d'après le TVI, l'équation $f(x)=40$ admet une unique solution t_0.

3) Par un balayage sur la calculatrice, on trouve $t_0\approx 0,4$ car $f(0,4)\approx 43,144$ et $f(0,45)\approx 38,44$ donc $0,4<t_0<0,45$.

On peut résoudre algébriquement $f(t)=40 \iff t=\dfrac{\ln 40-\ln 3}{6}\approx 0,432$

4) a) $d_0=f(0)-f\left(\dfrac{1}{60}\right)=225-200e^{-\frac{6}{60}}-25\approx 225-180,97-25\approx 19,03\approx 19$

La température de la baguette chute de 19°C la 1re minute après sa sortie du four.

b) $d_n = f\left(\dfrac{n}{60}\right) - f\left(\dfrac{n+1}{60}\right) = 200e^{-\frac{6n}{60}} + 25 - 200e^{-\frac{6(n+1)}{60}} - 25$

$= 200\left(e^{-0,1n} - e^{-0,1n} \times e^{-0,1}\right) = 200e^{-0,1n}\left(1 - e^{-0,1}\right)$

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{200e^{-0,1(n+1)}(1-e^{-0,1})}{200e^{-0,1n}(1-e^{-0,1})} = \frac{200e^{-0,1n}e^{-0,1}(1-e^{-0,1})}{200e^{-0,1n}(1-e^{-0,1})} = e^{-0.1} \approx 0,90$$

$\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{d_{n+1}}{d_n} = e^{-0,1}$, la suite (d_n) est géométrique de raison $q = e^{-0,1}$ et de premier terme $d_0 = 200(1 - e^{-0,1}) \approx 19$.

Comme la raison $0 < q = e^{-0,1} < 1$, la suite géométrique (d_n) est décroissante.
$d_n = d_0(e^{-0,1})^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (e^{0,1})n = 0$ car $-1 < e^{-0,1} < 1$ par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = 0$.

La suite (d_n) est décroissante et converge vers 0.

Ceci est prévisible car la température de la baguette diminue de moins en moins à mesure qu'elle se rapproche de la température ambiante et après un temps long, la baguette sera à température ambiante et donc la diminution de température sera nulle.

Autre méthode moins efficace :

$$\begin{aligned} d_{n+1} - d_n &= 200e^{-0,1(n+1)}(1-e^{-0,1}) - 200e^{-0,1n}(1-e^{-0,1}) \\ &= 200e^{-0,1n}e^{-0,1}(1-e^{-0,1}) - 200e^{-0,1n}(1-e^{-0,1}) \\ &= 200e^{-0,1n}(1-e^{-0,1})(e^{-0,1}-1) = -200e^{-0,1n}(1-e^{-0,1})^2 < 0 \end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N},\ d_{n+1} - d_n <$, la suite (d_n) est décroissante.

Soit la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $g(t) = 200e^{-0,1t}\left(1 - e^{-0,1}\right)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t\to+\infty} -0,1t = -\infty \\ \lim\limits_{t\to-\infty} e^t = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Par composition} \\ \lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0,1t} = 0 \end{array} \quad \overset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \quad \lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = 0$$

Comme le continue transmet la limite au discret, la suite (d_n) converge vers 0.