Correction du devoir
Du mardi 6 avril 2021

Exercice 1

Primitives **(5 points)**

1) $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$, forme $u'u$ car si on pose $u(x) = \ln(x+1) \Rightarrow u'(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

$F(x) = \dfrac{u^2(x)}{2} = \dfrac{\ln^2(x+1)}{2}$.

2) $f(x) = \dfrac{4}{(3x+1)^2} = \dfrac{4}{3} \times \dfrac{3}{(3x+1)^2}$, forme $\dfrac{u'}{u^2}$.

$F(x) = \dfrac{4}{3} \times \dfrac{-1}{u(x)} = \dfrac{-4}{3(3x+1)}$.

3) $f(x) = xe^{-x^2} = -\dfrac{1}{2} \times \left(-2x\,e^{-x^2}\right)$, forme $u'e^u$.

$F(x) = -\dfrac{1}{2}e^{u(x)} = -\dfrac{1}{2}\,e^{-x^2}$.

4) a) $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-2} = \dfrac{(ax+b)(x-2)+c}{x-2} = \dfrac{ax^2 - 2ax + bx - 2b + c}{x-2}$

$= \dfrac{ax^2 + (-2a+b)x - 2b + c}{x-2}$.

En identifiant à la première forme : $\begin{cases} a = 3 \\ -2a + b = -5 \\ -2b + c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -5 + 2a = 1 \\ c = 2 + 2b = 4 \end{cases}$

On a alors : $f(x) = 3x + 1 + \dfrac{4}{x-2}$.

b) $F(x) = \dfrac{3}{2}x^2 + x + 4\ln|x-2| \overset{x<2}{=} \dfrac{3}{2}x^2 + x + 4\ln(2-x)$.

Exercice 2

Équation différentielle **(5 points)**

1) $u'(x) + u(x) = 1e^{-x} - xe^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}$. La fonction u vérifie bien (E).

2) $y' + y = 0 \Leftrightarrow y' = -y$. (forme $y' = ay \Leftrightarrow y(x) = ke^{ax}$)

Les solution de l'équation (E_0) sont de la forme : $y(x) = k\,e^{-x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

3) Soit v, une solution de (E), comme u est aussi une solution de (E), on a : $\begin{cases} v' + v = e^{-x} \\ u' + u = e^{-x} \end{cases}$

En soustrayant terme à terme, on a $(v' - u') + (v - u) = 0 \Leftrightarrow (u-v)' + (u-v) = 0$.

La fonction $(v - u)$ est donc une solution de (E_0).

4) On a alors : $(v-u)(x) = ke^{-x} \quad \Leftrightarrow \quad v(x) = u(x) + ke^{-x} = xe^{-x} + ke^{-x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Réciproquement si $v(x) = xe^{-x} + ke^{-x}$, on vérifie facilement que v est solution de (E).

L'ensemble des solutions de (E) sont de la forme : $v(x) = xe^{-x} + ke^{-x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

5) $f(0) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad k = 2$. On a alors : $f(x) = xe^{-x} + 2e^{-x} = (x+2)\,e^{-x}$.

Exercice 3

Population en voie d'extinction **(6 points)**

1) $g = \ln(f) \quad \Leftrightarrow \quad f = e^g$. en remplaçant dans l'équation (E) :

$$f' = -\frac{1}{20}y(3 - \ln f) \quad \Leftrightarrow \quad g'e^g = -\frac{1}{20}e^g(3-g) \quad \overset{\div e^g}{\Leftrightarrow} \quad g' = -\frac{1}{20}(3-g) \quad \Leftrightarrow$$

$$g' = \frac{1}{20}g - \frac{3}{20} \quad \Leftrightarrow \quad \forall t \in [0\,;+\infty[,\ \ g'(t) = \frac{1}{20}g(t) - \frac{3}{20}.$$

2) L'ensemble des solution de l'équation (H) sont de la forme : $z'(t) = C\exp\left(\frac{1}{20}t\right) + 3$ avec $C \in \mathbb{R}$. $\left(\text{forme } y' = ay + b \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}\right)$

3) $z = \ln f \quad \Leftrightarrow \quad f = exp(z) \quad \Leftrightarrow \quad \forall t \in [0\,;+\infty[,\ \ f(t) = \exp\left[3 + C\exp\left(\frac{1}{20}t\right)\right]$.

4) a)
$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{t}{20} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{t\to+\infty} \exp(t) = +\infty \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Par composition} \\ \displaystyle\lim_{t\to+\infty} \exp\left(\frac{t}{20}\right) = +\infty\end{array} \quad \overset{\text{somme et produit}}{\Rightarrow} \quad \lim_{t\to+\infty} 3 - 3\exp\left(\frac{t}{20}\right) = -\infty$$

$$\text{or} \quad \lim_{t\to-\infty} \exp(t) = 0 \quad \overset{\text{composition}}{\Rightarrow} \quad \lim_{t\to+\infty} f(t) = 0.$$

b) $f'(x) = \left(-\frac{3}{20}\right) \times \exp\left(\frac{t}{20}\right) \times \exp\left[3 - 3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right]$.

$\forall t \in [0\,;+\infty[,\ \ \exp\left(\frac{t}{20}\right) > 0$ et $\exp\left[3 - 3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right] > 0 \quad \Rightarrow \quad f'(t) < 0$.

La fonction f est décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

c) $f(t) < 0,02 \quad \Leftrightarrow \quad \exp\left[3 - 3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right] < 0,02 \quad \overset{\ln\nearrow}{\Leftrightarrow} \quad 3 - 3\exp\left(\frac{t}{20}\right) < \ln 0,02 \quad \Leftrightarrow$

$3\exp\left(\frac{t}{20}\right) > 3 - \ln 0,02 \quad \Leftrightarrow \quad \exp\left(\frac{t}{20}\right) > 1 - \frac{1}{3}\ln 0,02 \quad \overset{\ln\nearrow}{\Leftrightarrow} \quad \frac{t}{20} > \ln\left(1 - \frac{1}{3}\ln 0,02\right) \quad \Leftrightarrow$

$t > 20\ln\left(1 - \frac{1}{3}\ln 0,02\right) \approx 16,69$.

Au bout de 17 ans, selon ce modèle, la taille de l'échantillon sera inférieure à vingt individus.

Exercice 4

Dénombrement **(4 points)**

1) Les classements d'une course de chevaux sont associés à des tirages sans remise (arrangements). On a alors :

$$n(n-1) = 210 \quad \Leftrightarrow \quad n^2 - n - 210 = 0 \;\text{ on a : } \Delta = 1 + 840 = 841 = 29^2$$

La solution positive est alors $n = \dfrac{1+29}{2} = 15.$

2) Les poignées de main dans un groupe sont associées à des tirages simultanés (combinaisons). On a alors :

$$\binom{n}{2} = 210 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n(n-1)}{2} = 210 \quad \Leftrightarrow \quad n^2 - n - 420 = 0 \;\text{ on a : } \Delta = 1681 = 41^2$$

La solution positive est alors $n = \dfrac{1+41}{2} = 21.$

3) a) Partition : $\boxed{\text{13 carreaux}}\boxed{\text{13 piques}}\boxed{\text{26 autres cartes}}$

Nombre de tirages : $\binom{13}{2} \times \binom{13}{3} = 22\,308.$

b) On passe par l'événement contraire : ensemble des mains déduit des mains sans roi :

Nombre de tirages : $\binom{52}{5} - \binom{48}{5} = 886\,656$

c) Il faut séparer les mains contenant le roi de pique de celles qui ne le contienne pas.

Partition : $\boxed{\text{Roi pique}}\boxed{\text{3 autres rois}}\boxed{\text{12 autres piques}}\boxed{\text{36 autres cartes}}$

Nombre de tirages : $\binom{1}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{12}{2} \times \binom{36}{1} + \binom{3}{2} \times \binom{12}{3} = 7\,788$