Correction contrôle de mathématiques

Du lundi 25 janvier 2021

Exercice 1

Loi binomiale **(5 points)**

1) $p(X=3) = \binom{20}{3} \times 0,4^3 \times 0,6^{17} = \text{binomFdp}(20, 0.4, 3) \approx 0,012.$

$p(X=10) = \binom{20}{10} \times 0,4^{10} \times 0,6^{10} = \text{binomFdp}(20, 0.4, 10) \approx 0,117.$

2) $p(X \geqslant 9) = 1 - p(X \leqslant 8) = 1 - \text{binomFRép}(20, 0.4, 8) \approx 0,404.$

3) $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X=0) = 1 - 0,6^{20} \approx 1,000.$
On est donc quasi certain d'obtenir au moins un succès.

4) $\text{E}(X) = np = 20 \times 0,4 = 8$ et $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{4,8} \approx 2,191.$

5) $p(6 \leqslant X \leqslant 10) = p(X \leqslant 10) - p(X \leqslant 5) = 0,747.$

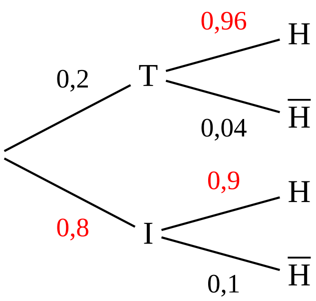
On a : $\text{E}(X) + \sigma(X) \approx 10,191 \approx 10$ et $\text{E}(X) - \sigma(X) \approx 5,809 \approx 6.$

L'intervalle $[6, 10]$ correspond à l'intervalle de confiance à 75 %.

Exercice 2

Réservations d'hôtel **(7 points)**

1) a) On a l'arbre suivant :



b) $p(\text{H}) \overset{\text{prob. totale}}{=} p(\text{T} \cap \text{H}) + p(\text{I} \cap \text{H}) = p(\text{T})p_{\text{T}}(\text{H}) + p(\text{I})p_{\text{I}}(\text{H})$

$= 0,2 \times 0,96 + 0,8 \times 0,9 = 0,912.$

c) $p_{\text{H}}(\text{I}) = \dfrac{p(\text{I} \cap \text{H})}{p(\text{H})} = \dfrac{0,8 \times 0,9}{0,912} \approx 0,789.$

2) a) Soit l'expérience : on tire au hasard une réservation et on appelle succès la personne se présente à l'hôtel avec une probabilité de 0,912. On réitère 106 fois cette expérience, que l'on assimile à des tirages avec remise, de façon identique et indépendante dont la variable aléatoire X est associée au nombre de succès.
X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(106\,;\ 0,912)$.

b) $p(X=106) = 0,912^{106} \approx 5,75 \times 10^{-5} \approx 6 \times 10^{-5}.$

c) $p(X \geqslant 101) = 1 - p(X \leqslant 100) = 1 - \text{binomFRép}(106, 0.912, 100) \approx 0,087 \approx 0,09.$

Il y a 9 % de chance que le directeur se retrouve en situation de surréservation.

d) On cherche le nombre de réservation n pour que : $p(X \leqslant 100) \geqslant 0,99$

À l'aide de la calculatrice. On rentre la fonction :
$Y_1 = \text{binomFRép}(X, 0.912, 100)$.
Puis on crée un tableau de valeurs, initialisé à 100 avec un pas de 1. On obtient alors le tableau ci-contre :

X	Y1
100	1
101	0.9999
102	0.9991
103	0.9955
104	0.9845
105	0.9594
106	0.913
107	0.8408
108	0.7437
109	0.6284
110	0.5055

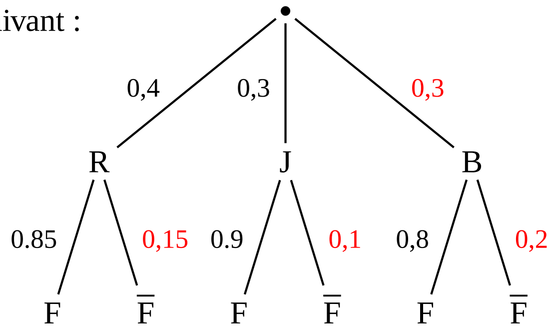
On trouve donc $n = 103$.

Si le directeur ouvre le nombre de réservation à 103, il est sûr à 99 % que toutes les réservations seront honorées.

Exercice 3

Bulbes de tulipes **(3 points)**

1) On obtient l'arbre suivant :



2) $p(\text{F}) \overset{\text{prob. totale}}{=} p(\text{R} \cap \text{F}) + p(\text{J} \cap \text{F}) + p(\text{B} \cap \text{F}) = p(\text{R})p_{\text{R}}(\text{F}) + p(\text{J})p_{\text{J}}(\text{F}) + p(\text{B})p_{\text{B}}(\text{F})$

$= 0,4 \times 0,85 + 0,3 \times 0,9 + 0,3 \times 0,8 = 0,85.$

3) On a donc : $p(\text{F}) = p_{\text{R}}(\text{F}) = 0,85.$ Les événement F et R sont indépendants.

Exercice 4

Permis de conduire **(5 points)**

1) On obtient le tableau suivant :

	A	$\overline{\text{A}}$	Total
R_1	50	100	150
R_2	25	75	100
R_3	0	50	50
Total	75	225	300

2) a) $p(\text{A} \cap \text{R}_2) = \dfrac{25}{300} = \dfrac{1}{12}$ b) $p(\text{R}_2) = \dfrac{100}{300} = \dfrac{1}{3}$ c) $p_{\text{R}_2}(\text{A}) = \dfrac{25}{100} = \dfrac{1}{4}$.

3) a) On a : $p(X = 1) = \dfrac{150}{300} = \dfrac{1}{2}$ $p(X = 2) = \dfrac{100}{300} = \dfrac{1}{3}$ $p(X = 3) = \dfrac{50}{300} = \dfrac{1}{6}$

x_i	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{6}$

b) $\text{E}(X) = \dfrac{1}{2} \times 1 + \dfrac{1}{3} \times 2 + \dfrac{1}{6} \times 3 = \dfrac{3 + 4 + 3}{6} = \dfrac{5}{3} \approx 1,67.$

La moyenne du nombre de présentations à l'examen est de 1,67.