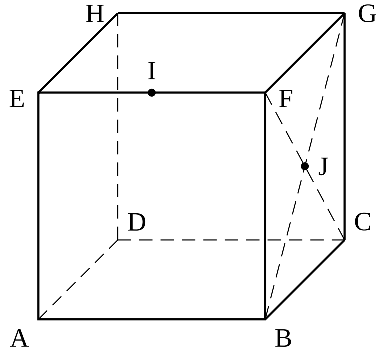
Devoir de mathématiques

À rendre le lundi 1er mars 2021

EXERCICE 1

Tétraèdre **(5 point)**

Soit le cube ABCDEFGH de côté 1. Soit I et J les milieux respectifs de [EF] et [BG] et $(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ un repère orthonormé de l'espace.



1) a) Montrer que $\overrightarrow{DJ}$ est normal au plan (BGI).
   b) Déterminer une équation cartésienne du plan (BGI).
2) On note d la droite passant par F et orthogonale au plan (BGI).
   a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.
   b) Déterminer les coordonnées du point L intersection de la droite d et du plan (BGI).
3) On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule : $V = \dfrac{1}{3} \times \mathscr{B} \times h$.
   où $\mathscr{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur associée à cette base.
   a) Calculer le volume de la pyramide FBGI.
   b) En déduire l'aire du triangle BGI.

EXERCICE 2

Droite, plan et sphère **(8 points)**

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
Soit les points A(1 ; 1 ; 4) ; B(4 ; 2 ; 5) ; C(3 ; 0 ; −2) et J(1 ; 4 ; 2). On note :

- (P) le plan passant par les points A, B et C ;
- d la droite passant par le point J et de vecteur directeur $\vec{u}(1\,;\,1\,;\,3)$.

1) Position relative de (P) et de d
   a) Montrer que le vecteur $\vec{n}(1\,;-4\,;\,1)$ est normal à (P).
   b) Déterminer une équation cartésienne du plan (P).
   c) Montrer que d est parallèle à (P).

On rappelle que, un point I et un réel $r > 0$ étant donnés, la sphère de centre I et de rayon r est l'ensemble des points M vérifiant IM $= r$.
On considère le point I(1 ; 9 ; 0) et on appelle (S) la sphère de centre I et de rayon 6.

2) Position relative de (P) et de (S)
   a) Montrer que la droite Δ passant par I et orthogonale au plan (P) coupe ce plan (P) au point H(3 ; 1 ; 2).
   b) Calculer la distance IH.
      On admet que pour tout point M du plan (P) on a IM $\geqslant$ IH.

c) Le plan (P) coupe-t-il la sphère (S) ? Justifier la réponse

3) Position relative de d et de (S).

a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.

b) Montrer qu'un point M de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ appartient à la sphère (S) si et seulement si : $(x-1)^2+(y-9)^2+z^2=36$.

c) Montrer que la droite d coupe la sphère en deux points distincts.
On ne cherchera pas à déterminer les coordonnées de ses points.

Exercice 3

Vrai-Faux **(5 points)**

Les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.

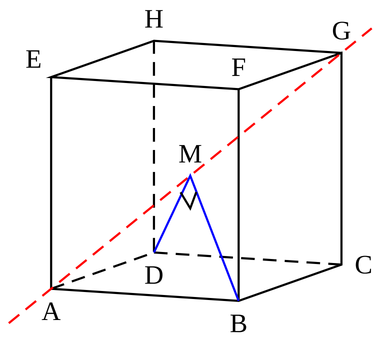
1) **Affirmation 1** : L'équation $(3\ln x-5)(e^x+4)=0$ admet exactement deux solutions.

2) Soit la suite (u_n) définie par : $u_0=2$ et, pour $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=2u_n-5n+6$..
Affirmation 2 : Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=3\times2^n+5n-1$.

3) Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n=n^2+\dfrac{1}{2}$.
Affirmation 3 : La suite (u_n) est géométrique.

4) Soit d la droite passant par le point A$(-3\ ;\ 7\ ;\ -12)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1\ ;\ -2\ ;\ 5)$.
Soit d' la droite ayant pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x=\ \ 2t-1\\ y=-4t+3\\ z=10t-2\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.
Affirmation 4 : Les droites d et d' sont confondues.

5) Soit un cube ABCDEFGH, L'espace est muni du repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$. On considère un point M de la droite (AG).
Affirmation 5 : Il y a exactement deux positions du point M sur la droite (AG) telles que les droites (MB) et (MD) soient orthogonales.



Exercice 4

Section plane dans un cube **(2 points)**

Soit le cube ABCDEFGH et les points M et N milieux respectifs des arêtes [AD] et [AB].

Tracer soigneusement la section du plan (HMN) avec le cube, en laissant les traits de construction, sur **l'annexe à rendre avec la copie**.

Nom :

Prénom

Annexe