BACCALAURÉAT BLANC

DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 HEURES
Les calculatrices sont AUTORISÉES

Coefficient : 16

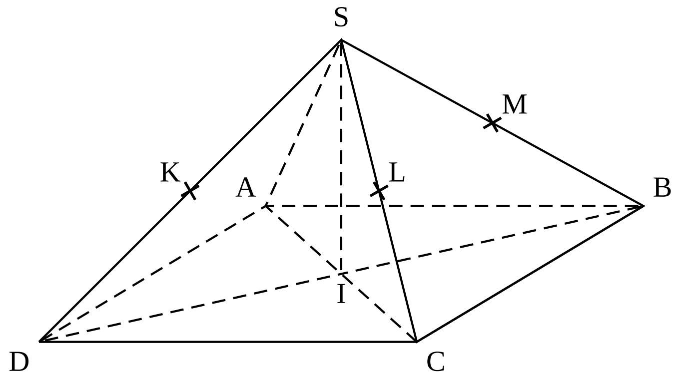
Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- *le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.*

TOURNEZ LA PAGE S.V.P.

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.



SABCD est une pyramide régulière à base carrée ABCD dont toutes les arêtes ont la même longueur.
Le point I est le centre du carré ABCD.
On suppose que : IC = IB = IS = 1.
Les points K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes [SD], [SC] et [SB].

1) Les droites suivantes ne sont pas coplanaires :

a. (DK) et (SD) **b.** (AS) et (IC) **c.** (AC) et (SB) **d.** (LM) et (AD)

Pour les questions suivantes, on se place dans le repère orthonormé de l'espace $\left(I\,;\,\overrightarrow{IC},\,\overrightarrow{IB},\,\overrightarrow{IS}\right)$.

2) Les coordonnées du milieu N de [KL] sont :

a. $\left(\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{4}\right)$ **b.** $\left(\frac{1}{4}\,;\,-\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{2}\right)$ **c.** $\left(-\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{2}\right)$ **d.** $\left(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,1\right)$

3) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AS}$ sont :

a. $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

4) Une représentation paramétrique de la droite (AS) est :

a. $\begin{cases}x=-1-t\\y=t\\z=-t\end{cases},\quad t\in\mathbb{R}$ **b.** $\begin{cases}x=-1+2t\\y=0\\z=1+2t\end{cases},\quad t\in\mathbb{R}$

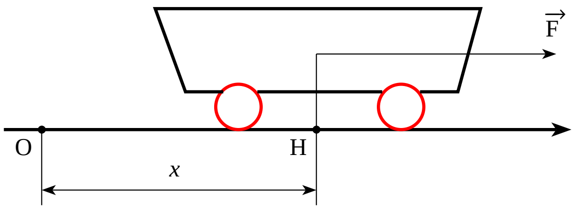
c. $\begin{cases}x=t\\y=0\\z=1+t\end{cases},\quad t\in\mathbb{R}$ **d.** $\begin{cases}x=-1-t\\y=1+t\\z=1-t\end{cases},\quad t\in\mathbb{R}$

5) Une équation cartésienne du plan (SCB) est :

a. $y+z-1=0$ **b.** $x+y+z-1=0$ **c.** $x-y+z=0$ **d.** $x+z-1=0$

EXERCICE 2 (5 points)

Un chariot de masse 200 kg se déplace sur une voie rectiligne et horizontale. Il est soumis à une force d'entraînement constante $\vec{F}$ de valeur 50 N. La force de frottement est proportionnelle à la vitesse et de sens contraire ; le coefficient de proportionnalité a pour valeur absolue 25 N.m^{-1}.s.



La position du chariot est repérée par la distance x, en mètres, du point H à l'origine O du repère en fonction du temps t, exprimé en secondes. On prendra t dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
Les loi de Newton conduisent à l'équation différentielle du mouvement :

$$(\mathrm{E})\ :\ \ 25x' + 200x'' = 50$$

1) On note $v(t)$ la vitesse du chariot au temps t ; on rappelle que $v(t) = x'(t)$
Prouver que x est solution de (E) si et seulement si v est solution de l'équation différentielle (F) : $v' = -\dfrac{1}{8}v + \dfrac{1}{4}$. Résoudre alors l'équation différentielle (F).
2) On suppose que, à l'instant $t = 0$, on a : $x(0) = 0$ et $x'(0) = 0$.
   a) Calculer, pour tout nombre réel t positif, $x'(t)$.
   b) En déduire que l'on a pour tout nombre réel t positif : $x(t) = 2t - 16 + 16\,e^{-\frac{t}{8}}$.
3) Calculer $\mathrm{V} = \displaystyle\lim_{t\to+\infty} v(t)$. Pour quelles valeurs de t, la vitesse du chariot est-elle inférieure ou égale à 90 % de sa valeur limite V ?
4) Quelle est la distance parcourue par le chariot au bout de 30 seconde ?
On exprimera cette distance en mètres, au décimètre près.

EXERCICE 3 (5 points)

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n + \dfrac{1}{4}n + 1$.

1) Calculer, en détaillant les calculs, u_1 et u_2 sous forme de fraction irréductible.
2) a) Compléter la fonction $u(n)$ en Python pour qu'elle calcule la valeur de u_n, n étant donné.
   b) On donne les premières valeurs de u dans le tableau suivant. Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).

```python
def u(n):
    u=...
    for i in range(...):
        u=...
    return u
```

n	0	1	2	3	4
u_n	1	1,75	2,562 5	3,421 875	4,316 406 25

3) a) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $n \leqslant u_n \leqslant n + 1$.
   b) En déduire, en justifiant la réponse, le sens de variation et la limite de la suite (u_n).
   c) Démontrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 1$.

4) On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$
   a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b) En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

EXERCICE 4 (5 points)

Exercice au choix du candidat

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B. Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B. Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés par chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

Exercice A

Principaux domaines abordés : Fonction exponentielle ; intégration par partie

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (2x-1)\,e^{2x} + 1$.

1) Déterminer la fonction dérivée g' puis dresser le tableau de variations de g.
   (On ne demande pas les limites en $\pm\infty$). En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.
2) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $1 - g(x) \geqslant 0$
   b) Soit $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} [1 - g(x)]\,\mathrm{d}x$. Calculer I, à l'aide d'une intégration par parties.
   c) Interpréter graphiquement les résultats des questions 2a) et 2b)
3) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{x}$
   a) Calculer les limites en $-\infty$, en 0 et en $+\infty$.
   b) En déduire que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote que l'on précisera.
   c) À l'aide de la question 1, déterminer le sens de variation de la fonction f puis dresser son tableau de variations.

Exercice B

Principaux domaines abordés : Fonction logarithme ; convexité

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = x + 4 - 4\ln x - \dfrac{3}{x}$.
On note $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.

1) Déterminer la limite de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
2) On admet que la fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
   Démontrer que, pour tout nombre réel $x > 0$, on a : $f'(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2}$.
3) a) Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
   On y fera figurer les valeurs exactes des extremums et les limites de f en 0 et en $+\infty$.
   b) À l'aide du tableau variations, justifier le nombre de solutions de l'équation $f(x) = \dfrac{5}{3}$.
4) Étudier la convexité de la fonction f c'est-à-dire préciser les parties de l'intervalle $]0\,;+\infty[$ sur lesquelles f est convexe, et celles sur lesquelles f est concave.
   On justifiera que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un unique point d'inflexion, dont on précisera les coordonnées.