BACCALAURÉAT BLANC

DE MATHÉMATIQUES

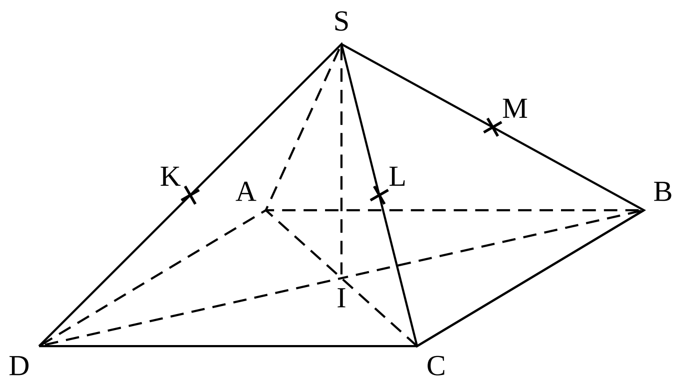
Durée de l'épreuve : 4 HEURES
Les calculatrices sont AUTORISÉES

Coefficient : 16

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- *le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.*

EXERCICE 1 (5 points)



1) Les droites suivantes ne sont pas coplanaires : **c.** (AC) et (SB)

On procède par élimination.

- Les droites (DK) et (SD) sont sécantes en D donc coplanaires ; on élimine **a.**
- Les droites (AS) et (IC) sont sécantes en A donc coplanaires ; on élimine **b.**
- Les droites (LM) et (AD) sont toutes deux parallèles à (BC) donc parallèles entre elles (th des milieux) ; elles sont donc coplanaires ; on élimine **d.**

Repère orthonormé de l'espace $\left(\mathrm{I}\,;\ \overrightarrow{\mathrm{IC}},\ \overrightarrow{\mathrm{IB}},\ \overrightarrow{\mathrm{IS}}\right)$.

2) Les coordonnées du milieu N de [KL] sont : **b.** $\left(\dfrac{1}{4}\,;\ -\dfrac{1}{4}\,;\ \dfrac{1}{2}\right)$

- Le milieu K de [SD] a pour coordonnées $\left(0\,;\ -\dfrac{1}{2}\,;\ \dfrac{1}{2}\right)$.
- Le milieu L de [SC] a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}\,;\ 0\,;\ \dfrac{1}{2}\right)$.
- Le milieu N de [KL] a donc pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{4}\,;\ -\dfrac{1}{4}\,;\ \dfrac{1}{2}\right)$.

3) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AS}}$ sont : **b.** $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

4) Une représentation paramétrique de la droite (AS) est : **c.** $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 1 + t \end{cases},\quad t \in \mathbb{R}$

La droite (AS) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{\mathrm{AS}}\ (1\,;\ 0\,;\ 1)$; la seule représentation qui convienne est la **c.**

5) Une équation cartésienne du plan (SCB) est : **b.** $x + y + z - 1 = 0$

On procède par élimination :

- Le plan d'équation $y + z - 1 = 0$ ne contient pas C $(1\,;\ 0\,;\ 0)$; on élimine **a.**
- Le plan d'équation $x - y + z = 0$ ne contient pas S $(0\,;\ 0\,;\ 1)$; on élimine **c.**
- Le plan d'équation $x + z - 1 = 0$ ne contient pas B $(0\,;\ 1\,;\ 0)$; on élimine **d.**

EXERCICE 2 (5 points)

(E) : $25x' + 200x'' = 50$.

1) On remplace dans (E), x' par v et x'' par v', on obtient alors :

$$25v + 200v' = 50 \Leftrightarrow 200v' = -25v + 50 \overset{\div 200}{\Leftrightarrow} v' = -\frac{1}{8}v + \frac{1}{4}$$

Les solutions de $y' = ay + b$ sont de la forme $y(t) = k\,e^{at} - \dfrac{b}{a}$ donc : $v(t) = k\,e^{-\frac{t}{8}} + 2$.

2) a) $\begin{cases} x'(t) = k\,e^{-\frac{t}{8}} + 2 \\ x'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'(t) = k\,e^{-\frac{t}{8}} + 2 \\ k + 2 = 0 \Leftrightarrow k = -2 \end{cases} \Leftrightarrow x'(t) = -2\,e^{-\frac{t}{8}} + 2$.

b) On intègre x' pour obtenir x : $x'(t) = 16\underbrace{\left(-\frac{1}{8}\,e^{-\frac{t}{8}}\right)}_{u'\,e^u}+2$, on obtient pour x :

$$\begin{cases} x(t) = 16\,e^{-\frac{t}{8}} + 2t + C \\ x(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = 16\,e^{-\frac{t}{8}} + 2t + C \\ 16 + C = 0 \Leftrightarrow C = -16 \end{cases} \Leftrightarrow x(t) = 2t - 16 + 16\,e^{-\frac{t}{8}}.$$

3) $v(t) = x'(t) = -2\,e^{-\frac{t}{8}} + 2$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t\to+\infty} -\dfrac{t}{8} = -\infty \\ \lim\limits_{t\to-\infty} e^t = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Par composition} \\ \lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\frac{t}{8}} = 0 \end{array} \overset{\text{somme}}{\Rightarrow} V = \lim_{t\to+\infty} v(t) = 2.$$

$$v(t) \leqslant 0,9V \Leftrightarrow -2\,e^{-\frac{t}{8}} + 2 \leqslant 1,8 \Leftrightarrow -2\,e^{-\frac{t}{8}} \leqslant -0,2 \Leftrightarrow e^{-\frac{t}{8}} \geqslant 0,1 \overset{\exp\nearrow}{\Leftrightarrow} -\frac{t}{8} \geqslant \ln 0,1$$

$$\Leftrightarrow t \leqslant -8\ln 0,1\ (\approx 18,42) \Leftrightarrow t \in [0\,;-8\ln 0,1]$$

4) $x(30) = 2(30) - 16 + 16\,e^{-3,75} \approx 44,37$.

La distance parcourue par le chariot au bout de 30 secondes est 44,4 m au décimètre près.

EXERCICE 3 (5 points)

1) La relation de récurrence donne pour :

- $n = 0,\ u_1 = \dfrac{3}{4}u_0 + 1 = \dfrac{3}{4} + 1 = \dfrac{7}{4}$
- $n = 1,\ u_2 = \dfrac{3}{4}u_1 + \dfrac{1}{4} + 1 = \dfrac{21}{16} + \dfrac{5}{4} = \dfrac{41}{16}$

2) a) On obtient l'algorithme suivant :

```
def u(n):
    u=1
    for i in range(n):
        u=3/4*u+1/4*i+1
    return u
```

b) On peut conjecturer, d'après le tableau, que la suite (u_n) est croissante.

3) a) **Initialisation :** $n = 0$, on a $0 \leqslant u_0 = 1 \leqslant 0 + 1$. La proposition est initialisée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $n \leqslant u_n \leqslant n+1$, montrons que $n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+2$.

$$\text{HR} : n \leqslant u_n \leqslant n+1 \overset{\times\frac{3}{4}}{\Rightarrow} \frac{3}{4}n \leqslant \frac{3}{4}u_n \leqslant \frac{3}{4}(n+1) \overset{+\frac{1}{4}n+1}{\Rightarrow}$$

$$n+1 \leqslant \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 \leqslant \frac{3}{4}n + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}n + 1 \Rightarrow n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n + \frac{7}{4} \leqslant n+2$$

La propriété est héréditaire.

Par initialisation et hérédité : $\forall n \in \mathbb{N},\ n \leqslant u_n \leqslant n+1$.

b) De 3a) : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} n \leqslant u_n \leqslant n+1 \\ n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+2 \end{cases} \Rightarrow n \leqslant u_n \leqslant n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+2 \Rightarrow u_n \leqslant u_{n+1}$

La suite (u_n) est croissante.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ par comparaison $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

c) Pour $n \neq 0$, $n \leqslant u_n \leqslant n+1 \overset{\div n}{\Rightarrow} 1 \leqslant \dfrac{u_n}{n} \leqslant 1 + \dfrac{1}{n}$.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{n} = 1$, d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{n} = 1$.

4) a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = \dfrac{3}{4}u_n + \dfrac{1}{4}n + 1 - n - 1 = \dfrac{3}{4}(u_n - 1) = \dfrac{3}{4}v_n$.

La suite (v_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{3}{4}$ et de premier terme $v_0 = u_0 = 1$.

b) $v_n = v_0\, q^n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ donc $u_n = v_n + n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n + n$

Exercice 4 (5 points)

Exercice au choix du candidat

Exercice A

1) $g'(x) = 2\,e^{2x} + (2x-1)(2\,e^{2x}) = e^{2x}(2 + 4x - 2) = 4x\,e^{2x}$.

Comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{2x} > 0$ le signe de $g'(x)$ est du signe de x :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$g(0) = 0$	$\nearrow$	

En on déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geqslant 0$.

2) a) $1 - g(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow -(2x-1)e^{2x} \geqslant 0 \overset{e^x>0}{\Leftrightarrow} -2x + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow S = \left]-\infty\,;\, \dfrac{1}{2}\right]$.

b) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} (-2x+1)e^{2x}\,\mathrm{d}x$. $\quad \begin{array}{|ll} u(x) = -2x+1 & u'(x) = -2 \\ v'(x) = e^{2x} & v(x) = \dfrac{1}{2}e^{2x} \end{array}$

$$I = \left[\left(-x + \frac{1}{2}\right)e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \int_0^{\frac{1}{2}} e^{2x}\,\mathrm{d}x = 0 - \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}e - 1.$$

c) Sur $\left[0\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$, la fonction $x \mapsto 1 - g(x)$ est continue et positive, donc I représente l'aire du domaine délimitée par $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droite $x = 0$ et $x = \dfrac{1}{2}$ (en u.a.).

3) a) Limites en $-\infty$:

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} - 1 = -1 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty \end{array}\right\}$ Par quotient $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

Limite en 0 : on change la forme $f(x) = 2 \times \dfrac{e^{2x} - 1}{2x}$

On sait que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ par composition $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = 2$.

Limite en $+\infty$: on change la forme $\quad f(x) = 2 \times \dfrac{e^{2x}}{2x} - \dfrac{1}{x}$.

On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ par composition $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{2x} = +\infty$.

or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0$ par somme et produit $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b) La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale en $-\infty$, l'axe des abscisses.

c) $f'(x) = \dfrac{2x\,e^{2x} - e^{2x} + 1}{x^2} = \dfrac{e^{2x}(2x-1)+1}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
D'après 1), $g(x) \geqslant 0$, la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}^*$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	2 || 2	$\nearrow$	$+\infty$

Remarque : On pourrait prolonger f par continuité en 0, en posant $f(0) = 2$.

Exercice B

1) Limite en 0^+ : on change la forme $\quad f(x) = x + 4 + \dfrac{-4x\ln x - 3}{x}$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0 \overset{\text{somme}}{\Rightarrow} \lim_{x\to 0^+} -4x\ln x - 3 = -3 \\ &\lim_{x\to 0^+} x = 0^+ \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Par quotient } \lim_{x\to 0^+} \frac{-4x\ln x - 3}{x} = -\infty$$

Par somme avec $x + 4$, on a $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

Limite en $+\infty$: on change la forme $\quad f(x) = x\left(1 + \dfrac{4}{x} - 4 \times \dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{3}{x^2}\right)$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{4}{x} - \frac{3}{x} = 1 \\ &\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\text{Par somme et produit} \\ &\lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{4}{x} - 4 \times \frac{\ln x}{x} - \frac{3}{x^2} = 1 \end{aligned}$$

Par produit avec x, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2) $f'(x) = 1 - \dfrac{4}{x} + \dfrac{3}{x^2} = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2}$

3) a) $f'(x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2 - 4x + 3 = 0 \quad\overset{\text{racine évidente}}{\Leftrightarrow}\quad x = 1$ ou $x = 3$.

Le signe de $f'(x)$ est le signe de $x^2 - 4x + 3$, on a alors :

x	0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$6 - 4\ln 3$	$\nearrow$	$+\infty$

b) $6 - 4\ln 3 \approx 1,606$ donc $6 - 4\ln 3 < \dfrac{5}{3} < 2$.

Sur les intervalles $]-\infty\,;\,1[$, $[1\,;\,3]$ et $]3\,;+\infty[$, la fonction f est monotone, continue et $\dfrac{5}{3}$ appartient aux intervalles $]-\infty\,;\,2[$, $[6-4\ln 3\,;\,2]$ et $]6-4\ln 3\,;+\infty[$, donc d'après le TVI, l'équation $f(x) = \dfrac{5}{3}$ admet sur chacun des ces intervalles une unique solution.

L'équation $f(x) = \dfrac{5}{3}$ admet donc 3 solutions sur $]0\,;+\infty[$.

4) $f'(x) = 1 - \dfrac{4}{x} + \dfrac{3}{x^2} \quad \Rightarrow \quad f''(x) = \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{6}{x^3} = \dfrac{4x-6}{x^3}$.

$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{3}{2}$

Comme $x > 0$, le signe de $f''(x)$ est celui de $4x-6$, on a donc :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
convexité		concave	0	convexe	

Comme $f''(x)$ s'annule et change de signe en $x = \dfrac{3}{2}$, la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion en $\text{I}\left(\dfrac{3}{2}\,;\,f\left(\dfrac{3}{2}\right)\right)$ avec $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{7}{2} - 4\ln\dfrac{3}{2} \approx 1,878$