Correction contrôle de mathématiques

Du mercredi 6 octobre 2021

EXERCICE 1

Suite arithmético-géométrique **(5 points)**

1) $u_1 = 0,75u_0 + 5 = 1,5 + 5 = 6,5$, $u_2 = 0,75u_1 + 5 = 4,875 + 5 = 9,875$.

2) a) $u_{n+1} - u_n = -18 \times 0.75^{n+1} + 20 + 18 \times 0.75^n - 20 = 18 \times 0,75^n(-0,75 + 1)$
$= 18 \times 0,75^n \times 0,25 = 4,5 \times 0,75^n > 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$, la suite (u_n) est croissante.

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,75^n = 0$ car $-1 < 0,75 < 1$.

Par produit et somme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 20$. La suite (u_n) est convergente vers 20.

3) Le programme suivant, en Python , doit renvoyer après son exécution la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $u_n \geqslant 19,5$

On trouve alors : $n = 13$.

À partir de $n = 13$, les termes u_n sont dans l'intervalle $[19,5\,;\,20[$.

```
def seuil():
    n=0
    u=2
    while u<19.5 :
        u=0.75*u+5
        n=n+1
    return n
```

EXERCICE 2

Somme de termes **(4 points)**

1) a) S_1 est la somme des termes d'une suite arithmétique de raison 5 et de 1er terme 17.

Le nombre de termes est alors : $N = \dfrac{2\,547 - 17}{5} + 1 = 507$.

b) $S_1 = \text{Nbre de termes} \times \dfrac{\sum \text{termes extrêmes}}{2} = 507 \times \dfrac{17 + 2\,547}{2} = 649\,974$.

2) a) S_2 est la somme des termes d'une suite géométrique (u_n) de raison $q = 5$ et de premier terme $u_0 = 2$.

Le dernier terme $u_n = 156\,250 \Leftrightarrow 2 \times 5^n = 156\,250 \Leftrightarrow 5^n = \dfrac{156\,250}{2} = 78\,125$.

Par tâtonnement, on trouve : $5^7 = 78\,125$. Il y a donc 8 termes.

b) $S_2 = 1^{\text{er}}\text{ terme} \times \dfrac{1 - \text{raison}^{\text{Nbre de termes}}}{1 - \text{raison}} = 2 \times \dfrac{1 - 5^8}{1 - 5} = \dfrac{5^8 - 1}{2} = 195\,312$.

EXERCICE 3

Évolution d'une espèce animale **(6 points)**

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 10\,000 \\ u_{n+1} = 0,95u_n + 200 \end{cases}$

1) $u_1 = 10\,000 \times 0,95 + 200 = 9\,700$, $u_2 = 0,95 \times 9\,700 + 200 = 9\,415$.

2) a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 4\,000 = 0,95u_n + 200 - 4\,000 = 0,95u_n - 3\,800 = 0,95\left(u_n - \dfrac{3\,800}{0,95}\right)$

$= 0,95(u_n - 4\,000) = 0,95v_n$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 0,95$, la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,95$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 4\,000 = 6\,000$.

b) $v_n = v_0\, q^n = 6\,000 \times 0,95^n \quad \Rightarrow \quad u_n = v_0 + 4\,000 = 6\,000 \times 0,95^n + 4\,000$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,95^n = 0$ car $-1 < 0,95 < 1$.
Par produit et somme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4\,000$.

3) Soit (p_n) la suite où le terme p_n donne la population animale l'année $2020 + n$.
Sachant que cette population était de 10 000 en 2020 et comme cette population baisse de 5 % par an et que l'on rajoute 200 individus chaque année, le terme p_n a pour expression :

$$\begin{cases} p_0 = 10\,000 \\ p_{n+1} = p_n - 0,05u_n + 200 = 0,95p_n + 200 \end{cases}$$

La suite (p_n) est donc la suite (u_n) étudiée aux questions 1) et 2).

D'après 2), on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4\,000$, donc la population animale (p_n) ne s'éteindra pas mais sur une longue période baissera vers 4 000 individus soit une diminution de plus de la moitié.

Cette affirmation est donc exacte.

EXERCICE 4

Suite auxiliaire **(5 points)**

1) a) $u_1 = \sqrt{1+3} = 2$, $\quad u_2 = \sqrt{4+3} = \sqrt{7}$, $\quad u_3 = \sqrt{7+3} = \sqrt{10}$

b) $u_1 - u_0 = 2 - 1 = 1$ et $u_2 - u_1 = \sqrt{7} - 2$.
$u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$, la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

2) a) $v_{n+1} - v_n = u_{n+1}^2 - u_n^2 = u_n^2 + 3 - u_n^2 = 3$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = 3$, donc la suite (v_n) est arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $v_0 = u_n^2 = 1$.

b) $v_n = v_0 + nr = 1 + 3n$ comme $u_n > 0$ on a $u_n = \sqrt{v_n} = \sqrt{1+3n}$.

c) $u_n \geqslant 50 \overset{u_n>0}{\Rightarrow} u_n^2 \geqslant 2500 \Rightarrow 1 + 3n \geqslant 2500 \Rightarrow n \geqslant \dfrac{2500-1}{3} \Rightarrow n \geqslant 833$

À partir de $n = 833$, $u_n \geqslant 50$.