Correction du devoir
Du lundi 8 novembre 2021

EXERCICE 1

Étude d'une suite **(5 points)**

1) **Initialisation :** $n = 0$, $0 \leqslant u_0 = 1 \leqslant 1$. La propriété est initialisée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $n \leqslant u_n \leqslant n+1$, montrons que $n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+2$.

HR : $n \leqslant u_n \leqslant n+1 \overset{\times\frac{3}{4}}{\Rightarrow} \dfrac{3n}{4} \leqslant \dfrac{3u_n}{4} \leqslant \dfrac{3(n+1)}{4} \overset{+\frac{n}{4}+1}{\Rightarrow}$

$\dfrac{3n}{4} + \dfrac{1}{4}n + 1 \leqslant \dfrac{3u_n}{4} + \dfrac{n}{4} + 1 \leqslant \dfrac{3(n+1)}{4} + \dfrac{n}{4} + 1 \Rightarrow n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n + \dfrac{7}{4} \leqslant n+2$

Le propriété est héréditaire.

Par initialisation et hérédité : $\forall n \in \mathbb{N}, \ n \leqslant u_n \leqslant n+1$.

2) • $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{1}{4}u_n + \dfrac{n}{4} + 1$. D'après l'encadrement de la question 1) :

$u_n \leqslant n+1 \overset{\times -\frac{1}{4}}{\Rightarrow} -\dfrac{1}{4}u_n \geqslant -\dfrac{n+1}{4} \overset{+\frac{n}{4}+1}{\Rightarrow} -\dfrac{1}{4}u_n + \dfrac{n}{4} + 1 \geqslant -\dfrac{n+1}{4} + \dfrac{n}{4} + 1 \Rightarrow$

$u_{n+1} - u_n \geqslant \dfrac{3}{4} > 0$. Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} - u_n > 0$. La suite u_n est croissante.

On peut aussi utiliser les encadrements de la question 1) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ n \leqslant u_n \leqslant n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+2 \Rightarrow u_{n+1} \geqslant u_n$$

• D'après l'encadrement de la question 1) : $u_n \geqslant n$ or $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, d'après le théorème de comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

3) a) $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = \dfrac{3}{4}u_n + \dfrac{n}{4} + 1 - n - 1 = \dfrac{3}{4}u_n - \dfrac{3n}{4} = \dfrac{3}{4}(u_n - n) = \dfrac{3}{4}v_n$.

$\forall n \in \mathbb{N}, \ \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{3}{4}$, donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{3}{4}$ et de premier terme $v_0 = u_0 = 1$.

b) $v_n = v_0\, q^n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n \Rightarrow u_n = v_n + n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n + n$.

c) • $u_{n+1} - u_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1} + n + 1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^n - n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n\left(\dfrac{3}{4} - 1\right) + 1 = -\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n + 1$.

$\forall n \in \mathbb{N}, \ \left(\dfrac{3}{4}\right)^n \leqslant 1 \overset{\times -\frac{1}{4}}{\Rightarrow} -\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n \geqslant -\dfrac{1}{4} \overset{+1}{\Rightarrow} -\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n + 1 \geqslant \dfrac{3}{4} > 0$

$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} - u_n > 0$, la suite (u_n) est croissante.

• $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0 \text{ car } -1 < \dfrac{3}{4} < 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \end{cases} \overset{\text{somme}}{\Rightarrow} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

EXERCICE 2

Limites de suites **(4 points)**

1) $u_n = \dfrac{n^2\left(5-\dfrac{2}{n}\right)}{n^2\left(\dfrac{1}{n^2}-1\right)} = \dfrac{5-\dfrac{2}{n}}{\dfrac{1}{n^2}-1}$ d'où $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} 5-\dfrac{2}{n} = 5 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2}-1 = -1 \end{cases} \overset{\text{quotient}}{\Rightarrow} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -5$

2) $\begin{cases} -1 \leqslant \cos n \leqslant 1 \\ -4 \leqslant 4(-1)^n \leqslant 4 \end{cases} \overset{\text{somme}}{\Rightarrow} -5 \leqslant \cos n + 4(-1)^n \leqslant 5 \overset{\div n}{\Rightarrow} -\dfrac{5}{n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{5}{n}.$

$\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{5}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{n} = 0$, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

3) $u_n \overset{\div n}{=} 2n+1-\dfrac{1}{n+\dfrac{1}{n}}$ d'où $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} 2n+1 = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+\dfrac{1}{n}} = 0 \end{cases} \overset{\text{somme}}{\Rightarrow} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

4) $u_n = 3^n\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - 1\right]$ d'où $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0 \text{ car } -1 < \dfrac{2}{3} < 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty \text{ car } 3 > 1 \end{cases} \overset{\text{somme et produit}}{\Rightarrow} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n - \infty$

EXERCICE 3

Espèce animale **(7 points)**

1) $u_1 = 0,75u_0(1-0,1u_0) = 0,75\times 0,7(1-0,07) \approx 0,488$.
Au début de l'année 2021, il y a 488 individus.

$u_2 = 0,75u_1(1-0,1u_1) \approx 0,75\times 0,488(1-0,0488) \approx 0,348$.
Au début de l'année 2022, il y a 348 individus.

2) $f(x) = 0,75x(1-0,1x) = 0,75x - 0,075x^2$ donc $f'(x) = 0,75 - 0,15x$.

$x \leqslant 1 \overset{\substack{\times -0,15 \\ x\geqslant 0}}{\Rightarrow} -0,15x \geqslant -0,15 \overset{+0,75}{\Rightarrow} -0,15x + 0,75 \geqslant 0,6 \Rightarrow f'(x) > 0$

$\forall x \in [0\,;\,1]$, $f'(x) > 0$ la fonction f est croissante sur $[0\,;\,1]$.

x	0 1
$f'(x)$	+
$f(x)$	0 ↗ 0,675

3) $f(x) = x \Leftrightarrow 0,75x - 0,075x = x \Leftrightarrow 0,25x + 0,075x^2 = 0 \Leftrightarrow 0,25x(1+0,3) = 0.$

$x = 0$ ou $x = -\dfrac{1}{0,3} = -\dfrac{10}{3} \notin [0\,;\,1]$. Une unique solution $x = 0$ dans $[0\,;\,1]$.

4) a) **Initialisation :** $n = 0$, $0 \leqslant u_1 = 0,488 \leqslant u_0 = 0,7 \leqslant 1$. La propriété est initialisée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$,
supposons que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$, montrons que $0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

HR : $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1 \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(0) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \leqslant f(1) \Rightarrow$

$0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 0,675 \leqslant 1$. La propriété est héréditaire.

Par initialisation et hérédité : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.

b) D'après la question précédente, la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc, d'après le théorème des suites monotones, la suite (u_n) converge vers $\ell \geqslant 0$.

c) La suite (u_n) est convergente et définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.
La fonction f est continue sur $[0\ ;\ 1]$, d'après le théorème du point fixe, ℓ vérifie l'équation $f(x) = x$. D'après la question 3), on en déduit que $\ell = 0$.

5) a) Le biologiste a raison car la suite (u_n) converge vers 0.

b) La fonction menace() renvoie la valeur 13

Au bout de 13 ans le nombre d'individus sera inférieur ou égal à 15 et donc l'espèce animale sera en voie d'extinction.

EXERCICE 4

Somme de termes **(4 points)**

1) $u_1 = \dfrac{1}{1+\sqrt{1}} = \dfrac{1}{2}$, $\quad u_2 = \dfrac{1}{2+\sqrt{1}} + \dfrac{1}{2+\sqrt{2}} = \dfrac{8-3\sqrt{2}}{6} \approx 0,626$

$u_3 = \dfrac{1}{3+\sqrt{1}} + \dfrac{1}{3+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{3+\sqrt{3}} \approx 0,688$.

2) a) On a le programme complété suivant.

```python
from math import*
def u(n):
    u=0
    for i in range(1,n+1):
        u=u+1/(n+sqrt(i))
    return u
```

b) On obtient alors le tableau suivant :

n	10	50	100	1 000	10 000
u_n	0,819	0,914	0,938	0,979	0,993

Conjecture : la suite (u_n) converge vers 1.

3) $1 \leqslant k \leqslant n \overset{\sqrt{\ }\nearrow}{\Rightarrow} 1 \leqslant \sqrt{k} \leqslant \sqrt{n} \overset{+n}{\Rightarrow} n+1 \leqslant n+\sqrt{k} \leqslant n+\sqrt{n} \overset{\uparrow(-1)}{\Rightarrow} \dfrac{1}{n+\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{1}{n+\sqrt{k}} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

4) Par somme des n termes : $\dfrac{n}{n+\sqrt{n}} \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n+\sqrt{k}} \leqslant \dfrac{n}{n+1} \Leftrightarrow \dfrac{n}{n+\sqrt{n}} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n}{n+1}$

$\dfrac{n}{n+\sqrt{n}} \overset{\div n}{=} \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}}$ or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 1 \overset{\text{quotient}}{\Rightarrow} \lim_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+\sqrt{n}} = 1$.

$\dfrac{n}{n+1} \overset{\div n}{=} \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}}$ or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{n} = 1 \overset{\text{quotient}}{\Rightarrow} \lim_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$.

D'après le théorème des gendarmes la suite (u_n) converge vers 1.