Contrôle de mathématiques

Mercredi 24 novembre 2021

Exercice 1

Limites **(5 points)**

Déterminer les limites suivantes en justifiant avec soin :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+x-6}{2x-2}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\cos x$ 3) $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}$

4) a) Donner le tableau de signes de x^2-4 pour $x \in \mathbb{R}$.
   b) En déduire les limites à gauche et à droite de (-2) de la fonction f : $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-4}$.
   La fonction f admet-elle une limite en (-2) ? Pourquoi ?
   c) Interpréter géométriquement ces résultats.

Exercice 2

Continuité **(5 points)**

1) Rappeler la définition de la continuité en a pour une fonction f.
   Que cela signifie-t-il géométriquement ?
2) Soit le fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = -x^2-4x-2 & \text{si } x \leqslant -1 \\ f(x) = \dfrac{x+1}{x+2} & \text{si } x > -1 \end{cases}$
   La fonction f est-elle continue en -1 ? Pourquoi ?
3) Soit le fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} g(x) = \dfrac{x-4}{x-3} & \text{si } x \leqslant 2 \\ g(x) = \sqrt{x+2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$
   a) Tracer soigneusement la courbe $\mathscr{C}_g$ de la fonction g, à l'aide de la calculatrice, pour : $x \in [-2\,;\,7]$ et $y \in [0,3]$. Unité graphique 1 cm sur les deux axes.
   b) Que peut-on conjecturer sur la continuité de g en 2 ? Démontrer cette conjecture.
   c) Que peut-on conjecturer sur la dérivabilité de g en 2 ? Pourquoi ?

Exercice 3

Vrai-Faux **(4 points)**

Pour les proposition suivantes, préciser si elle est vraie ou non en justifiant votre réponse.

1) **Proposition 1 :** « $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2x^2+4x-16}{3x^2-5x-2}\right) = \dfrac{12}{7}$ ».

2) **Proposition 2 :** « $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\sqrt{\dfrac{2+x}{x^3-1}}\right) = 0$ ».

EXERCICE 4

Équation, valeur approchée et limite d'une suite **(6 points)**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x + 3$.

1) Déterminer les limites de la fonction f en $\pm\infty$.
2) Déterminer $f'(x)$ puis résoudre l'équation $f'(x) = 0$
3) Dresser le tableau de variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction f.
4) a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ une unique solution α sur $\mathbb{R}$ puis montrer que la solution $\alpha \in [-3\,;-1]$.

   b) À l'aide d'un programme utilisant la méthode de dichotomie, donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

   On indiquera le nombre de boucles nécessaires pour obtenir cette précision.

   c) Quelle est l'ensemble de définition de la fonction g définie par : $g(x) = \sqrt{x^3 - 3x + 3}$?