Correction contrôle de mathématiques

Du mercredi 24 novembre 2021

EXERCICE 1

Limites **(5 points)**

Déterminer les limites suivantes en justifiant avec soin :

1) $f(x) = \dfrac{x^2+x-6}{2x-2} \overset{\div x \neq 0}{=} \dfrac{x+1-\dfrac{6}{x}}{2-\dfrac{2}{x}}$ on a $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} x+1-\dfrac{6}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 2-\dfrac{2}{x} = 2 \end{array}\right\}$ Par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2) Soit $g(x) = x\cos x$

Pour $x > 0$, on a : $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \overset{\times x>0}{\Rightarrow} -x \leqslant x\cos x \leqslant x$

$\lim\limits_{x\to 0^+} -x = \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$, d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x\to 0^+} x\cos x = 0$.

3) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \end{array}\right\}$ Par composition $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$

4) a) Les racines de (x^2-4) sont (-2) et 2 donc :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
x^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-2} 2x = -4 \\ \lim\limits_{x\to-2^-} x^2-4 = 0^+ \\ \lim\limits_{x\to-2^+} x^2-4 = 0^- \end{array}\right\}$ Par quotient $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = +\infty$

$f(x)$ n'admet pas de limite en (-2) car $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = +\infty$.

c) La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale en $x = -2$.

EXERCICE 2

Continuité **(5 points)**

1) Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a.

La fonction f est continue en a si, et seulement si, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Cela signifie que la courbe $\mathscr{C}_f$ est en un seul morceau (pas de « cassure » de la courbe).

2) $f(-1) = -(-1)^2 - 4(-1) - 2 = 1$, $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{x+1}{x+2} = 0$.

La fonction f n'admet pas de limite en (-1) donc f n'est pas continue en (-1).

La fonction f est seulement continue à gauche de (-1).

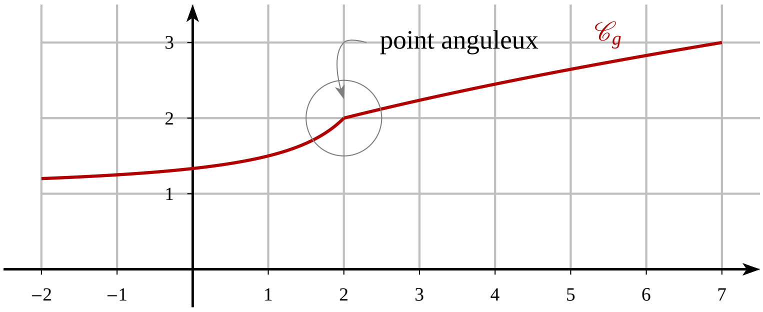
3) a) On obtient la courbe voir à la fin de l'exercice.

b) Conjecture : g est continue en 2.

$g(2) = \dfrac{2-4}{2-3} = 2$, $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x-4}{x-3} = 2$, $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \sqrt{x+2} = 2$.

Donc $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = g(2)$, g est continue en 2.

c) Conjecture : g n'est pas dérivable en 2.
La courbe $\mathscr{C}_g$ n'admet pas de tangente en 2 (point anguleux).



Exercice 3

Vrai-Faux **(4 points)**

1) **Proposition 1 : Vraie.** On pose $f(x) = \dfrac{2x^2+4x-16}{3x^2-5x-2}$.

La fonction f n'est pas définie en 2 et sa limite est de la forme "0/0"
Comme 2 est une racine du numérateur et du dénominateur, on peut factoriser :

$$f(x) = \frac{(x-2)(2x+8)}{(x-2)(3x+1)} \overset{x\neq 2}{=} \frac{2x+8}{3x+1} \quad \text{et} \quad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2} 2x+8 = 12 \\ \lim\limits_{x\to 2} 3x+1 = 7 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Par quotient} \\ \lim\limits_{x\to 2} f(x) = \dfrac{12}{7}\end{array}$$

2) **Proposition 2 : Fausse.** On pose $g(x) = 1 - \sqrt{\dfrac{2+x}{x^3-1}}$.

$$\frac{2+x}{x^3-1} \overset{\div x\neq 0}{=} \frac{\dfrac{2}{x}+1}{x^2-\dfrac{1}{x}} \quad \text{on a :} \quad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{x}+1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 - \dfrac{1}{x} = +\infty \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Par quotient} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2+x}{x^3-1} = 0\end{array} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$$

Par composition : $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{\dfrac{2+x}{x^3-1}} = 0$ et par somme $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1$

Exercice 4

Équation, valeur approchée et limite d'une suite **(6 points)**

1) $$f(x) \overset{x\neq 0}{=} x^3\left(1-\frac{3}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right) \quad \text{et} \quad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{3}{x^3} = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Par produit} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\end{array}$$

Par un raisonnement similaire, on obtient $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

2) $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$ donc $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$.

3) On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

4) a) En deux temps

- Sur l'intervalle $]-\infty\,;-1]$, la fonction f est continue car dérivable, strictement croissante et $f(x)$ change de signe car $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $f(-1) = 5$,
  d'après le TVI, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α.
- Sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$, $f(x) \geqslant 1$ donc $f(x)$ ne peut s'annuler.
- Conclusion : l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

  De plus $f(-3) = -27 + 9 + 3 = -15$ et $f(-1) = 5$
  donc $f(x)$ change de signe sur $[-3\,;-1]$ et donc $\alpha \in [-3\,;-1]$.

b) On obtient : : $\alpha \approx -2,104$ après 11 itérations.

c) La fonction g est définie si $f(x) \geqslant 0$ donc $D_g = [\alpha\,;+\infty[$.