Devoir de mathématiques

À rendre le lundi 3 janvier 2022

Exercice 1

QCM justifié **(4 points)**

Chaque questions comporte 4 réponses, choisir la bonne réponse en **justifiant son choix**

1) On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x^2 + 2x - \dfrac{3}{x}$.
Une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 est :

a) $y = 7(x-1)$ b) $y = x - 1$ c) $y = 7x + 7$ d) $y = x + 1$

2) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3e^x - x$.

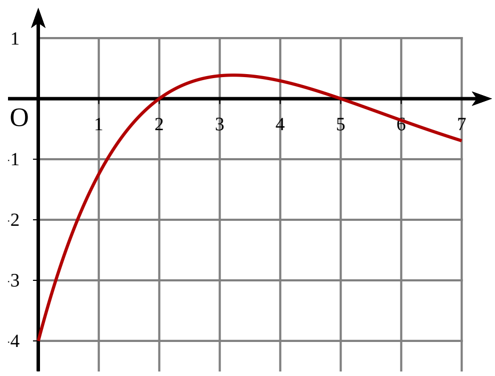
a) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 3$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

d) On ne peut pas déterminer la limite de la fonction g lorsque x tend vers $+\infty$

3) On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\,e^{-2x}$.
On note f'' la dérivée seconde de la fonction f. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x)$ est égal à :

a) $(1-2x)e^{-2x}$ b) $4(x-1)e^{-2x}$ c) $4e^{-2x}$ d) $(x+2)e^{-2x}$

4) Soit la représentation de f' fonction dérivée d'une fonction f définie sur $[0\,;7]$.



Le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0\,;7]$ est :

a)

x	0	3,25	7
$f(x)$	↗		↘

b)

x	0	2	5	7
$f(x)$	↗	↘	↗	

c)

x	0	2	5	7
$f(x)$	↘	↗	↘	

d)

x	0	2	7
$f(x)$	↗		↘

Exercice 2

Fonction exponentielle **(8 points)**

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = e^x + \dfrac{1}{x}$.

1) **Étude d'une fonction auxiliaire**

a) Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $g(x) = x^2 e^x - 1$.
Étudier le sens de variation de la fonction g et déterminer la limite de g en $+\infty$.
Dresser le tableau de variation.

b) Démontrer qu'il existe un unique réel α appartenant à $[0\ ;+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

c) Déterminer un encadrement de a à 10^{-3}.

d) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0\ ;+\infty[$.

2) **Étude de la fonction f**

a) Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

b) On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$.
Démontrer que pour tout réel strictement positif x : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

c) En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$.

d) Démontrer que f admet pour minimum le nombre : $m = \dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\alpha}$.

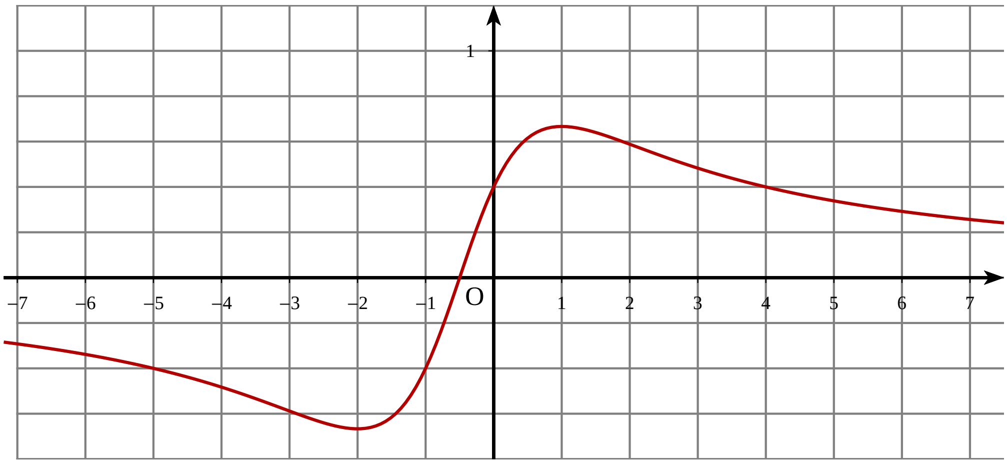
e) Justifier que $3,43 < m < 3,45$.

Exercice 3

Fonction ln **(8 points)**

Partie I : lectures graphiques

f désigne une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction dérivée f'.



Avec la précision permise par le graphique, répondre aux questions suivantes

1) Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe de la fonction f en 0.

2) a) Donner les variations de la fonction dérivée f'.

b) En déduire un intervalle sur lequel f est convexe.

Partie II : étude de fonction

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln\left(x^2 + x + \dfrac{5}{2}\right)$.

1) Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2) Déterminer $f'(x)$.

3) Dresser le tableau des variations de f.

4) a) Montrer que l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution α dans l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{2}\ ;+\infty\right[$.

   b) Donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

5) a) La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée seconde $f''(x)$.

   b) Déterminer le nombre de points d'inflexion de la courbe représentative de f.