Correction du devoir

Du lundi 3 janvier 2022

EXERCICE 1

QCM justifié **(4 points)**

1) **Réponse a)**

$f(1) = 1 + 2 - 3 = 0 \quad$ et $\quad f'(x) = 2x + 2 + \dfrac{3}{x^2} \Rightarrow f'(1) = 2 + 2 + 3 = 7.$

L'équation de la tangente en 1 : $\mathrm{T}_1 :\ y = f'(1)(x-1) + f(1) \Leftrightarrow y = 7(x-1)$

2) **Réponse b)** forme indéterminée : $g(x) = e^x\left(3 - \dfrac{x}{e^x}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \overset{\text{quotient}}{\Rightarrow} \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \overset{\text{somme}}{\Rightarrow} \lim_{x\to+\infty} 3 - \frac{x}{e^x} = 3 \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Par produit} \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty\end{array}$$

3) **Réponse b)**

$f'(x) = 1e^{-2x} + x(-2)e^{-2x} = e^{-2x}(1-2x)$

$f''(x) = -2e^{-2x}(1-2x) + e^{-2x}(-2) = e^{-2x}(-2+4x-2) = 4(x-1)e^{-2x}.$

4) **Réponse c)**

Il faut regarder le signe de $f'(x)$ sur le graphique :

- sur $[0\ ;\ 2]$, $f'(x) \leqslant 0$, f décroissante
- sur $[2\ ;\ 5]$, $f'(x) \geqslant 0$, f croissante
- sur $[5\ ;\ 7]$, $f'(x) \leqslant 0$, f décroissante

EXERCICE 2

Fonction exponentielle **(8 points)**

1) **Étude d'une fonction auxiliaire**

a) Limite en $+\infty$: $\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \end{array}\right\}$ Par produit et somme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

$g'(x) = 2xe^x + x^2e^x = xe^x(x+2)$, comme $x \geqslant 0$, $e^x > 0$ et $x + 2 > 0$:

Donc $g'(x) \geqslant 0$, la fonction g est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$.

On a alors le tableau de variation suivant :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	
$g(x)$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

b) Sur $\mathbb{R}_+$, la fonction g est continue (car dérivable), strictement croissante et la fonction g change de signe car $g(0) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

D'après le TVI, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

c) Pour obtenir un intervalle fermé, $g(1) = e - 1 \approx 1,718 > 0$ donc $\alpha \in [0\,;\,1]$.
Avec l'algorithme de dichotomie, on trouve : $0,703 \leqslant a \leqslant 0,704$ (10 itérations)

d) Comme la fonction g est croissante, on a :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

2) **Étude de la fonction f**

a) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0} e^x = 1\\ \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty\end{array}\right\}$ Par somme $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$ $\quad\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0\end{array}\right\}$ Par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

b) $f'(x) = e^x - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2e^x - 1}{x} = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

c) D'après l'étude de la fonction g, on a sur $\mathbb{R}_+^*$, le tableau de variation suivant :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

d) Le minimum m de la fonction vaut : $f(\alpha) = e^\alpha + \dfrac{1}{\alpha}$

or, on sait que $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha^2e^\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha^2}$

En remplaçant, on trouve alors : $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\alpha}$

e) D'après la question 1c), on sait que : $0,703 \leqslant \alpha \leqslant 0,704$
La fonction inverse est décroissante et la fonction carrée croissante sur $\mathbb{R}_+$, d'où :

$$\frac{1}{0,704} \leqslant \frac{1}{\alpha} \leqslant \frac{1}{0,703} \quad \text{et} \quad \frac{1}{0,704^2} \leqslant \frac{1}{\alpha^2} \leqslant \frac{1}{0,703^2}$$

Par somme : $\dfrac{1}{0,704} + \dfrac{1}{0,704^2} \leqslant m \leqslant \dfrac{1}{0,703} + \dfrac{1}{0,703^2} \Leftrightarrow 3,43 \leqslant m \leqslant 3,45$

Exercice 3

Fonction ln **(8 points)**

Partie I : lectures graphiques

1) Comme la courbe donnée est la représentation de f', pour déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f, on lit sur le graphique : $f'(0) = 0,4$.

2) a) D'après la courbe donnée, on a le tableau de variation de f' suivant :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

b) f est convexe si la fonction dérivée est croissante ($f''(x) > 0$) soit sur $[-2\ ;\ 1]$.

Partie II : étude de fonction

1) $f(x) \overset{x\neq 0}{=} \ln\left[x^2\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{2x^2}\right)\right]$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} 1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{2x^2} = 1\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Par produit} \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{2x^2}\right) = +\infty\end{array} \quad \text{or} \quad \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$$

Par composition : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$.

2) $f'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+\dfrac{5}{2}}$.

3) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$

Signe de $\left(x^2+x+\dfrac{5}{2}\right)$: $\Delta = 1-10 = -9 < 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2+x+\dfrac{5}{2} > 0$.

Donc signe de $f'(x)$ = signe de $(2x+1)$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\ln\frac{9}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

4) a) Sur $\left[-\dfrac{1}{2}\ ;+\infty\right[$, la fonction f est continue (car dérivable), strictement croissante et 2 est compris entre $\ln\dfrac{9}{4} \approx 0,811$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} = +\infty$,

d'après le TVI, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α.

b) $f(2) = \ln\dfrac{17}{2} \approx 2,140$ donc $\alpha \in [-0,5\ ;\ 2]$

Par l'algorithme de dichotomie, en rentrant la fonction $f(x)-2$, on a : $\alpha \approx 1,767$

5) a) $f''(x) = \dfrac{2\left(x^2+x+\dfrac{5}{2}\right)-(2x+1)^2}{\left(x^2+x+\dfrac{5}{2}\right)^2} = \dfrac{2x^2+2x+5-4x^2-4x-1}{\left(x^2+x+\dfrac{5}{2}\right)^2} = \dfrac{2(-x^2-x+2)}{\left(x^2+x+\dfrac{5}{2}\right)^2}$.

b) Il faut déterminer les racines et le signe de $f''(x)$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2-x+2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$ ou $x_2 = -2$

On obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

La courbe $\mathscr{C}_f$ admet deux points d'inflexion en (-2) et en 1 car $f''(x)$ s'annule deux fois en changeant de signe en (-2) et en 1.