Contrôle de mathématiques

Mercredi 30 mars 2022

Exercice 1

Primitives **(5 points)**

1) Déterminer une primitive pour les fonctions suivantes sur l'intervalle I proposé. On indiquera clairement la forme utilisée pour déterminer la primitive.

   a) $f(x) = \dfrac{1}{2x+1} + x$, $\mathrm{I} = \left]-\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$

   b) $f(x) = 4\,e^{-x+2} + 3$, $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

   c) $f(x) = \dfrac{2}{(5x+4)^3}$, $\mathrm{I} = \left]-\dfrac{4}{5}\,;+\infty\right[$.

2) Soit la fonction F définie sur $\mathrm{I} =]-1\,;+\infty[$ par : $F(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 7$.
   Montrer que F est une primitive sur I de la fonction f définie par : $f(x) = \ln(x+1) - 2$.

3) Soit la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par : $G(x) = (ax+b)\,e^{x-1} + x$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.
   Déterminer a et b pour que G soit une primitive de g définie par : $g(x) = x\,e^{x-1} + 1$.

Exercice 2

Équations différentielles **(4 points)**

1) Soit l'équation différentielle (E) définie $\mathbb{R}$: $y' + 10y = 0$

   a) Déterminer les solutions de l'équation (E).

   b) Déterminer la solution f qui prend la valeur $\dfrac{2}{e}$ en 0,1.

2) Soit l'équation différentielle (E') définie sur $\mathbb{R}$ par : $y' = y - 1$.

   a) Déterminer les solutions de l'équation (E').

   b) Déterminer la solution f qui prend la valeur -2 en 0.

Exercice 3

Température d'une pièce de fonte **(6 points)**

La température en degré Celsius d'une pièce de fonte est une fonction f du temps t, exprimé en minutes, depuis sa sortie du four. La pièce sort du four à 1 400 °C.

On admet que cette fonction f, définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ est une solution de l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}) : \quad y' + 0,065y = 1,30$$

1) a) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

   b) Donner la fonction f vérifiant la condition initiale.

2) a) Déterminer, à la minute près, le temps nécessaire pour que la température de la pièce de fonte soit à 100 °C.

b) Déterminer les variations et la limite de la fonction f en $+\infty$.
Interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.

3) Recopier et compléter le programme en Python ci-joint permettant de trouver à la minute près le temps à partir duquel la pièce de fonte ne refroidit plus (température à moins de 1 °C de sa limite) puis donner le résultat en heures minutes.

```
from math import*
t=0
T=...
while .......:
    t =...
    T=......
print(...)
```

EXERCICE 4

Progression d'une épidémie **(5 points)**

On étudie une épidémie dans une population.
Au début de l'épidémie, on constate que 0,1 % de la population est contaminé.
Pour $t \in [0\,;\,30]$, on note $y(t)$ le pourcentage de personnes, après t jours, touchées par la maladie. On a alors $y(0) = 0,1$.
On admet que y est dérivable et strictement positive sur $[0\,;\,30]$ et vérifie :

$$(\text{E}) \quad : \quad y' = 0,05\,y(10 - y)$$

1) On considère la fonction $z = \dfrac{1}{y}$ définie sur $[0\,;\,30]$.

Démontrer que y est solution de (E) si, et seulement si, z vérifie (E') : $\begin{cases} z' = -0,5z + 0,05 \\ z(0) = 10 \end{cases}$

2) a) Déterminer la fonction z qui vérifie (E').

b) En déduire la fonction y solution de (E).

3) a) Calculer le pourcentage (arrondi à l'unité) de la population infectée après 30 jours.

b) Étudier la limite de y en $+\infty$ et interpréter dans le contexte de l'énoncé.