Correction contrôle de mathématiques

Du mercredi 30 mars 2022

EXERCICE 1

Primitives **(5 points)**

1) a) $f(x) = \dfrac{1}{2x+1} + x = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{2x+1} + x$, forme $\displaystyle\int \frac{u'}{u} = \ln|u|$, donc :

$F(x) = \dfrac{1}{2}\ln|2x+1| + \dfrac{1}{2}x^2 \overset{x>-\frac{1}{2}}{=} \dfrac{1}{2}\left[\ln(2x+1) + x^2\right]$

b) $f(x) = 4\,e^{-x+2} + 3 = (-4)(-e^{-x+2} + 3$, forme $\displaystyle\int u'e^u = e^u$, donc :

$F(x) = -4\,e^{-x+2} + 3x.$

c) $f(x) = \dfrac{2}{(5x+4)^3} = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{5}{(5x+4)^3}$, forme $\displaystyle\int \frac{u'}{u^n} = \frac{-1}{(n-1)\,u^{n-1}}$, donc :

$F(x) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{-1}{2(5x+4)^2} = \dfrac{-1}{5(5x+4)^2}.$

2) On dérive la fonction F pour vérifier que $F' = f$.

$\forall x \in \mathrm{I},\quad F'(x) = 1\ln(x+1) + (x+1) \times \dfrac{1}{x+1} - 3 = \ln(x+1) + 1 - 3 = \ln(x+1) - 2 = f(x)$

3) On dérive G puis en identifiant G' à g, on détermine a et b.

$G'(x) = a\,e^{x-1} + (ax+b)\,e^{x-1} = (ax+a+b)\,e^{x-1} + 1 \overset{\text{identification}}{\Rightarrow} \begin{cases} a = 1 \\ a+b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$

EXERCICE 2

Équations différentielles **(4 points)**

1) a) $y' + 10y = 0 \Leftrightarrow y' = -10y \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \ y(x) = k\,e^{-10x},\ \ k \in \mathbb{R}$

b) $f(0,1) = \dfrac{2}{e} \Leftrightarrow k\,e^{-1} = 2\,e^{-1} \Leftrightarrow k = 2$ donc $f(x) = 2\,e^{-10x}$.

2) a) $y' = y - 1 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \ y(x) = k\,e^x - \dfrac{-1}{1} \Leftrightarrow y(x) = k\,e^x + 1.$

b) $f(0) = -2 \Leftrightarrow k + 1 = -2 \Leftrightarrow k = -3$ donc $y(x) = -3\,e^x + 1.$

EXERCICE 3

Température d'une pièce de fonte **(6 points)**

1) a) $y' + 0,065y = 1,30 \Leftrightarrow y' = -0,065y + 1,3 \Leftrightarrow$

$\forall t \in [0\,;+\infty[,\ \ y(t) = k\,e^{-0,065t} - \dfrac{1,3}{-0,065} \Leftrightarrow y(t) = k\,e^{-0,065t} + 20.$

b) $f(0) = 1400 \Leftrightarrow k + 20 = 1400 \Leftrightarrow k = 1380$ donc $f(t) = 1380\,e^{-0,065t} + 20.$

2) a) $f(t) = 100 \Leftrightarrow 1380\,e^{-0,065t} + 20 = 100 \Leftrightarrow e^{-0,065t} = \dfrac{80}{1380} \Leftrightarrow$

$e^{-0,065t} = \dfrac{4}{69} \overset{\ln}{\Leftrightarrow} -0,065t = \ln\dfrac{4}{69} \Leftrightarrow t = -\dfrac{1}{0,065}\ln\dfrac{4}{69} \approx 43,81.$

La température de la pièce de fonte est à 100° C au bout de 44 minutes.

b) $\forall t \in [0\,;+\infty[,\quad f'(t) = -0,065 \times 1380\, e^{-0,065t} = -89.7\, e^{-0,065t} < 0$ décroissante.

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{t\to+\infty} -0,065t = -\infty \\ \lim\limits_{t\to-\infty} e^t = 0\end{array}\right. \overset{\text{composition}}{\Longrightarrow} \lim_{t\to+\infty} e^{-0,065t} = 0 \overset{\text{prd+somme}}{\Longrightarrow} \lim_{t\to+\infty} f(t) = 20.$$

Au bout d'un temps très long, la température de la pièce de fonte diminuera puis se stabilisera à 20°C ce qui correspond vraisemblablement à la température ambiante.

3) On a le programme suivant qui donne comme résultat : 112 soit 1h 52'

```
from math import*
t=0
T=1400
while T-20>=1:
    t=t+1
    T=1380*exp(-0.065*t)+20
print(t)
```

Exercice 4

Progression d'une épidémie **(5 points)**

1) z est dérivable car y est dérivable et ne s'annule pas : $z' = -\dfrac{y'}{y^2}$

$y' = 0,05\,y(10-y) \Leftrightarrow y' = 0,5y - 0,05y^2 \overset{\div(-y^2)}{\Leftrightarrow} -\dfrac{y'}{y^2} = -\dfrac{0.5}{y} + 0,05 \overset{z}{\Leftrightarrow} z' = -0,5z + 0,05$

De plus $y(0) = 0,1$ donc $z(0) = \dfrac{1}{0,1} = 10$.

2) a) Les solutions de (E') sont de la forme : $z(t) = k\,e^{-0,5t} - \dfrac{0,05}{-0,5} = k\,e^{-0,5t} + 0,1$.

$z(0) = 0 \Leftrightarrow k + 0,1 = 10 \Leftrightarrow k = 9,9$ d'où $z(t) = 9,9\,e^{-0,5t} + 0,1$.

b) On en déduit alors que : $y(t) = \dfrac{1}{z(t)} = \dfrac{1}{9,9\,e^{-0,5t} + 0,1}$.

3) a) $y(30) = \dfrac{1}{9,9\,e^{-15} + 0,1} \approx 10,00$

Après 30 jours, 10 % de la population est infectée.

b) $$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{t\to+\infty} -0,5t = -\infty \\ \lim\limits_{t\to-\infty} e^t = 0\end{array}\right. \overset{\text{composition}}{\Longrightarrow} \lim_{t\to+\infty} e^{-0,5t} = 0 \overset{\text{prd+somme}}{\Longrightarrow} \lim_{t\to+\infty} y(t) = \frac{1}{0,1} = 10.$$

Après un temps long ($\approx$ 1 mois), le pourcentage de la population infectée se stabilisera à 10 % ce qui reste modeste par rapport à l'infection au Covid.