Correction du devoir

Du mercredi 20 avril 2021

Exercice 1

Tirages de jetons **(4 points)**

On suppose que les jetons sont indiscernables pour être dans un cas d'équiprobabilité.

Nombre de tirages possibles (combinaison de 3 jetons parmi 9) : $\dbinom{9}{3} = \dfrac{9\times8\times7}{3\times2} = 84$.

1) Combinaison de 3 jetons parmi 5 : $\dbinom{5}{3} = \dbinom{5}{2} = \dfrac{5\times4}{2} = 10$ donc $p_1 = \dfrac{10}{84} = \dfrac{5}{42}$.

2) Combinaison de 3 jetons parmi 4 : $\dbinom{4}{3} = \dbinom{4}{1} = 4$ donc $p_2 = \dfrac{4}{84} = \dfrac{1}{21}$.

3) Tirer au plus deux jeton verts est le complémentaire de tirer que des jetons verts donc $p_3 = 1 - p_1 = 1 - \dfrac{5}{42} = \dfrac{37}{42}$.

4) $\left.\begin{array}{l}\text{Combinaison de 1 jetons parmi 5 et}\\ \text{combinaison de 2 jetons parmi 4}\end{array}\right\}$: $\dbinom{5}{1}\dbinom{4}{2} = 5\times6 = 30$ donc $p_4 = \dfrac{30}{84} = \dfrac{5}{14}$.

Exercice 2

Anagrammes **(4 points)**

1) Dans PATRICE, il y a 4 consonnes et 3 voyelles :
   a) Pour la terminaison arrangement de 2 consonnes parmi 4 : $4\times3 = 12$
   Pour l'intérieur : permutation des 5 lettres restantes : $5\,! = 120$.
   Il y a alors : $12\times120 = 1440$ anagrammes.
   b) Pour la terminaison arrangement de 2 voyelles parmi 3 : $3\times2 = 6$
   Pour l'intérieur : permutation des 5 lettres restantes : $5\,! = 120$.
   Il y a alors : $6\times120 = 720$ anagrammes.
   c) Pour le début 4 choix de consonnes et la fin 4 choix de voyelles : $4\times3 = 12$
   Pour l'intérieur : permutation des 5 lettres restantes : $5\,! = 120$.
   Il y a alors : $12\times120 = 1440$ anagrammes.
2) Dans le mot ANAGRAMME il y a 9 lettres dont 3 A et 2 M indiscernables.
   On calcule le nombre de permutations des 9 lettres que l'on divise par les ordres possibles des 3 A et 2 M. On a alors $\dfrac{9\,!}{3\,!\times2\,!} = 30\,240$ anagrammes.

Exercice 3

Paradoxe des anniversaires **(4 points)**

1) a) Dans l'ensemble des 365 dates d'anniversaire, le nombre des n-listes est : 365^n.
   b) Et le nombre des n-listes d'éléments distincts est : $\dfrac{365\,!}{(365-n)\,!}$.

c) La répartition des dates d'anniversaire étant homogène, il y a équiprobabilité.

La probabilité p_0 d'avoir des dates d'anniversaire distinctes parmi les n personnes est :

$$p_0 = \frac{365\,!}{(365-n)\,! \times 365^n}$$

Par le complémentaire, la probabilité p d'avoir au moins deux personnes de même date d'anniversaire est :

$$p = 1 - p_0 = 1 - \frac{365\,!}{(365-n)\,! \times 365^n}$$

⚠ Ce nombre est difficilement calculable sur la calculatrice pour un n donné car la calculatrice passe par des nombres intermédiaires qui dépasse sa capacité.

2) a) Ce programme programme calcule la probabilité d'avoir des dates d'anniversaire distinctes.

Pour éviter d'être hors capacité, il décompose le calcul de la façon suivante :

$$\frac{365\,!}{(365-n)\,! \times 365^n} = \underbrace{1 \times \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \cdots \times \frac{365-n+1}{365}}_{n \text{ termes}}$$

b) On trouve : $n = 47$ avec une probabilité de $0,955$.

Ce résultat va à l'encontre de l'intuition, car l'on pense souvent que le nombre de personnes doit être beaucoup plus élevé pour obtenir 95 % de réussite.

D'où le mot paradoxe.

Exercice 4

Formule **(1 point)**

$\forall n, p \in \mathbb{N}^*, \quad 1 \leqslant p \leqslant n$:

$$p\binom{n}{p} = \frac{p \times n\,!}{p\,!(n-p)\,!} = \frac{\cancel{p} \times n(n-1)\,!}{\cancel{p}(p-1)\,! \times (n-p)\,!} = n \times \frac{(n-1)\,!}{(p-1)\,! \times [n-1-(p-1)]\,!} = n\binom{n-1}{p-1}$$

Exercice 5

Tirage de lettres **(7 points)**

1) a) Combinaison de 2 lettres parmi 8 : $82 = \dfrac{8 \times 7}{2} = 28$.

b) On suppose que les lettres sont indiscernables pour avoir l'équiprobabilité.

Pour gagner, il faut tirer 1 consonne parmi 6 et 1 voyelle parmi 2 soit : $6 \times 2 = 12$.

La probabilité que le joueur gagne est donc : $p = \dfrac{12}{28} = \dfrac{3}{7}$

2) a) C'est une épreuve de Bernoulli où G peut prendre les valeurs : $(-k)$ et $(10-k)$.

g_i	$-k$	$10-k$
$p\,(G = g_i)$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$

b) $\mathrm{E}(G) \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{-4k + 3(10-k)}{7} \geqslant 0 \overset{\times 7}{\Leftrightarrow} -7k + 30 \geqslant 0 \Leftrightarrow k \leqslant \dfrac{30}{7} \approx 4,3$.

La mise maximale doit être de 4 € pour que le jeu reste favorable au joueur.

3) a) Soit l'expérience : un joueur tire simultanément deux lettres du sac et l'on appelle succès obtenir une consonne et une voyelle avec une probabilité $p = \dfrac{3}{7}$.
On réitère 10 fois cette expérience de façon identique et indépendante et l'on appelle X la variable aléatoire associée au nombre de succès.
X suit donc une loi binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = \dfrac{3}{7}$.

b) $p(X = 4) = \dbinom{10}{4} p^4(1-p)^6 = \dbinom{10}{4}\left(\dfrac{3}{7}\right)^4\left(\dfrac{4}{7}\right)^4 \approx 0,247.$

c) $p(X \geqslant 5) = 1 - p(X \leqslant 4) = 1 - \text{binomFRép}(10, \frac{3}{7}, 4) \approx 0,440.$
Parmi les 10 joueurs, il y a 44 % de chance qu'au moins 5 joueurs gagnent.

d) Il s'agit d'un problème de seuil où l'on cherche le nombre minimum de succès.
Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $p(X \leqslant n) \geqslant 0,95$.
Deux méthodes possibles :

- Par tâtonnement car le nombre d'expériences n'est pas trop élevé, à l'aide de la calculatrice on trouve :
  $p(X \leqslant 6) \approx 0,921$ et $p(X \leqslant 7) \approx 0,980$ donc $n = 7$
- Sinon on rentre dans la calculatrice la fonction $Y_1 = \text{binomFrép}(10, \frac{3}{7}, X)$
  On construit le tableau de valeur de Y_1 puis on choisit la première valeur de n pour que $p(X \leqslant n) \geqslant 0,95$

X	Y1
0	0.0037
1	0.0316
2	0.1255
3	0.3134
4	0.5601
5	0.7821
6	0.9208
7	0.9803
8	0.997
9	0.9998
10	1