

BACCALAURÉAT BLANC

DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 HEURES
Les calculatrices sont AUTORISÉES

Coefficient : 16

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- *le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.*

EXERCICE 1**(5 points)**

1) Réponse C.

A. $f'(x) = (2x - 2)e^x + (x^2 - 2x - 1)e^x = (x^2 - 3)e^x \neq (2x - 2)e^x$.

B. $f'(-2) = e^{-2} > 0$ donc f n'est pas décroissante sur l'intervalle $] -\infty ; 2]$.

C. $f(x) = x^2 e^x - 2x e^x - e^x$. or $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} -2x e^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} -e^x = 0$.

Par somme, on a bien $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

2) Réponse C.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ donc $\mathcal{C}_f$ ne peut avoir d'asymptote verticale.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{3}{5} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \end{array} \right\} \text{ donc } \mathcal{C}_f \text{ admet deux asymptotes horizontales } y = \frac{3}{5} \text{ et } y = 0.$$

3) Réponse B.

A. f'' n'a pas de signe constant sur $[-3 ; 3]$ donc f n'est convexe sur $[-3 ; 3]$.

B. f'' s'annule trois fois en changeant de signe donc f admet trois points d'inflexion.

C. f' est positive sur $[0 ; 2]$ donc f n'est pas décroissante sur $[0 ; 2]$.

4) Réponse A.

$$u_n = n^2 - 17n + 20 = \left(n - \frac{17}{2}\right)^2 - \frac{289}{4} + 20 = \left(n - \frac{17}{2}\right)^2 - \frac{209}{4}$$

A. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq -\frac{209}{4}$, la suite (u_n) est minorée.

B. $u_{15} = -10$ et $u_{16} = 4$ donc $u_{15} < u_{16}$, la suite (u_n) n'est pas décroissante.

C. L'équation $x^2 - 17x + 20 = 2021$ n'a pas de solution entière.

5) Réponse A.

A. la plus petite valeur de n telle que $u_n \geq 45$ car tant que $u < 45$ la boucle continue.

B. Faux pour la même raison

C. Faux car on incrémente n de 1.

EXERCICE 2**(5 points)**

1) $\overrightarrow{AB}(1; 0; 2)$ et $\overrightarrow{AC}(-2; 5; 1)$ donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -2 + 0 + 2 = 0$.

$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ le triangle ABC est rectangle en A.

2) a) $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 + 0 - 2 = 0$ et $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -4 + 5 - 1 = 0$

$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de(ABC) donc $\vec{n}$ est orthogonal à (ABC).

b) Soit M(x; y; z) un point du plan (ABC), on a alors :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-2 \\ y+1 \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2(x-2) + (y+1) - z = 0 \Leftrightarrow 2x + y - z - 3 = 0$$

Une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x + y - z - 3 = 0$.

c) $2x_S + y_S - z_S - 3 = 0 + 1 - 4 - 3 = -6 \neq 0$.

Le point S n'appartient pas au plan (ABC) donc les point A, B, C et S ne sont pas coplanaires

3) a) $(d) \perp (ABC)$ donc $\vec{n}$ est un vecteur directeur de la droite (d) , comme $S \in (d)$, on a alors :

$$(d) : \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = 4 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

b) Les coordonnées de H vérifient les équations de la droite (d) et l'équation du plan (ABC) .
En remplaçant les coordonnées de H en fonction de t dans l'équation de (ABC) :

$$2(2t) + (1 + t) - (4 - t) - 3 = 0 \Leftrightarrow 6t = 6 \Leftrightarrow t = 1$$

En remplaçant $t = 1$ dans les équations de (d) , on trouve $H(2; 2; 3)$.

$$4) \overrightarrow{SH}(2; 1; -1) \Rightarrow SH = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}, AB = \sqrt{1+0+4} = \sqrt{5} \text{ et } AC = \sqrt{4+25+1} = \sqrt{30}$$

$$V_{SABC} = \frac{\mathcal{A}(ABC) \times SH}{3} = \frac{AB \times AC \times SH}{6} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{30} \times \sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{900}}{6} = 5.$$

$$5) a) \overrightarrow{SA}(2; -2; -4) \Rightarrow SA = \sqrt{4+4+16} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$b) \overrightarrow{SB}(3; -2; -2) \Rightarrow SB = \sqrt{9+4+4} = \sqrt{17} \text{ et } \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = 6 + 4 + 8 = 18$$

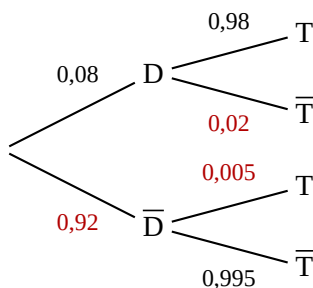
$$\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = SA \times SB \cos \widehat{ASB} \Leftrightarrow \cos \widehat{ASB} = \frac{\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB}}{SA \times SB} = \frac{18}{2\sqrt{6}\sqrt{17}} = \frac{9}{\sqrt{102}}$$

$$\widehat{ASB} = \arccos\left(\frac{9}{\sqrt{102}}\right) \approx 27,0^\circ.$$

EXERCICE 3

(5 points)

1) $p_D(T) = 0,98$, $p_{\overline{D}}(\overline{T}) = 0,995$ et $p(D) = 0,08$. on obtient l'arbre suivant :



$$2) p(T) \stackrel{\text{prob. totale}}{=} p(D \cap T) + p(\overline{D} \cap T) = p(D) \times p_D(T) + p(\overline{D}) \times p_{\overline{D}}(T) = 0,08 \times 0,98 + 0,92 \times 0,005 = 0,083.$$

$$3) a) p_T(D) = \frac{p(D \cap T)}{p(T)} = \frac{0,08 \times 0,98}{0,083} = 0,945$$

$$b) p_T(D) < 0,95$$

Le test proposé par le laboratoire ne sera donc pas commercialisé.

Partie B

1) a) Soit l'expérience, on contrôle au hasard un athlète et l'on appelle succès l'athlète a un test positif de probabilité 0,103.

On réitère 5 fois cette expérience de façon identique (en assimilant ce tirage à un tirage avec remise) et indépendante et l'on appelle X , la v.a. associée au nombre de succès.

X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(5; 0,103)$.

b) $E(X) = np = 5 \times 0,103 = 0,515$.

En moyenne sur un grand nombre de contrôles de 5 athlètes, il y aura 0,515 athlète contrôlé positif, soit à peu près 1 athlète sur 10 contrôlé positif.

c) $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - (1 - 0,103)^5 = 1 - 0,897^5 = 0,419$

- 2) On contrôle au hasard n athlètes de façon identique et indépendante et l'on appelle Y la v.a. associée au nombre de succès.

$$p(Y \geq 1) \geq 0,75 \Leftrightarrow 1 - 0,897^n \geq 0,75 \Leftrightarrow -0,897^n \geq -0,25 \Leftrightarrow 0,897^n \leq 0,25 \xrightarrow{\ln \nearrow} \\ n \ln 0,897 \leq \ln 0,25 \xrightarrow{\ln 0,897 < 0} n \geq \frac{\ln 0,25}{\ln 0,897} \approx 12,75$$

Il faudra donc contrôler au moins 13 athlètes pour que la probabilité d'avoir un test positif soit supérieure ou égale à 0,75.

EXERCICE 4

(5 points)

Exercice au choix du candidat

Exercice A

Partie 1 : Étude d'une fonction auxiliaire

1) a) $f'(x) = -30 + \frac{35}{x} = \frac{-30x + 35}{x} = \frac{5(7 - 6x)}{x}$

b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 7 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{6}$ et $\text{signe } f'(x) = \text{signe } (7 - 6x)$.

x	1	$\frac{7}{6}$	4
$f'(x)$	+	0	-

c) f est croissante sur $\left[1; \frac{7}{6}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{7}{6}; 4\right]$.

- 2) Sur $\left[1; \frac{7}{6}\right]$, la fonction f est croissante et $f(1) = 20$ donc f ne s'annule pas sur cette intervalle.

Sur $\left[\frac{7}{6}; 4\right]$, la fonction f est continue car dérivable, strictement décroissante et change de signe

car $f\left(\frac{7}{6}\right) = 15 + 35 \ln \frac{7}{6} \approx 20,40$ et $f(4) = -70 + 35 \ln 4 \approx -21,48$

d'après le TVI, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α .

Conclusion l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1; 4]$.

Par l'algorithme de dichotomie sur $[1; 4]$ on trouve $\alpha \approx 2,915$ après 12 itérations.

3)

x	1	α	4
$f(x)$	+	0	-

Partie 2 : Optimisation

1) $B(2,5) = -15 \times 2,5^2 + 15 \times 2,5 + 35 \times 2,5 \ln 2,5 \approx 23,925$.

Le bénéfice pour la vente de 2 500 litres de jus de fruits est de 23,925 milliers d'euros.

2) $B'(x) = -30x + 15 + 35 \ln x + 35x \times \frac{1}{x} = -30x + 15 + 35 \ln x + 35 = -30x + 50 + 35 \ln x = f(x)$

3) a)

x	1	α	4
$B'(x)$	+	0	-
$B(x)$	0	$B(\alpha)$	14,081

- b) D'après le tableau de variation le bénéfice maximal est obtenu pour $x = \alpha \approx 2,915$ soit pour 2 915 litres vendus.

Le bénéfice maximal est alors $B(\alpha) \approx 25,420$ milliers d'euros.

Exercice B

Principaux domaines abordés : Suite, raisonnement par récurrence, programmation

Partie I : Premier modèle

Vitesse de décongélation $v = \frac{1,3 - (-19)}{10} = 2,03 \text{ } ^\circ\text{C}/\text{mn}$

Température des gâteaux après 25 minutes : $-19 + 2,03 \times 25 = 31,75 \text{ } ^\circ\text{C}$.

Ce modèle n'est pas pertinent car la température des gâteaux est supérieure à la température ambiante après 25 minutes.

Partie II : Second modèle

$$1) T_{n+1} - T_n = -0,06 \times (T_n - 25) \Leftrightarrow T_{n+1} = T_n - 0,06T_n + 1,5 \Leftrightarrow T_{n+1} = 0,94T_n + 1,5.$$

$$2) T_1 = 0,94T_0 + 1,5 = 0,94 \times (-19) + 1,5 = 16,36 \approx -16,4$$

$$T_2 = 0,94T_1 + 1,5 = 0,94 \times (-16,36) + 1,5 = -13,8784 \approx -13,9$$

- 3) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, T_n \leq 25$.

Initialisation : $n = 0$ $T_0 = -19 \leq 25$. La proposition est initialisée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $T_n \leq 25$ montrons que $T_{n+1} \leq 25$

$$\text{HR } T_n \leq 25 \xrightarrow{\times 0,94} 0,94T_n \leq 23,5 \xrightarrow{+1,5} 0,94T_n + 1,5 \leq 25 \Rightarrow T_{n+1} \leq 25.$$

La proposition est héréditaire.

Par initialisation et hérédité : $\forall n \in \mathbb{N}, T_n \leq 25$

Ce résultat était effectivement prévisible car la température ne peut être supérieure à la température ambiante.

$$4) T_{n+1} - T_n = -0,06(T_n - 25) \text{ or } T_n \leq 25 \Rightarrow 25 - T_n \geq 0 \xrightarrow{\times -0,06} -0,06(T_n - 25) \geq 0.$$

$\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+1} - T_n \geq 0$ la suite (T_n) est croissante.

- 5) La suite (T_n) est croissante et majorée par 25 donc, d'après le théorème des suites monotones, la suite (T_n) est convergente vers ℓ telle que $\ell \leq 25$.

$$6) a) u_{n+1} = T_{n+1} - 25 = 0,94T_n + 1,5 - 25 = 0,94T_n - 23,5 = 0,94(T_n - 25) = 0,94u_n.$$

$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0,94$, la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 0,94$ et de premier terme

$$u_0 = T_0 - 25 = -44.$$

$$b) u_n = u_0 q^n = -44 \times 0,94^n \Rightarrow T_n = u_n + 25 = -44 \times 0,94^n + 25.$$

$$c) \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,94^n = 0 \text{ car } -1 < 0,94 < 1, \text{ par produit et somme } \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = 25.$$

La suite (T_n) converge vers 25 qui signifie qu'après un temps long, la température des gâteaux sera égal à la température ambiante de $25 \text{ } ^\circ\text{C}$.

$$7) a) T_{30} = -44 \times 0,94^{30} + 25 \approx 18,12.$$

Au bout d'une demi-heure la température des gâteaux est d'environ $18 \text{ } ^\circ\text{C}$.

- b) Par un tableau de valeurs, on trouve $T_{17} \approx 9,63$ et $T_{18} \approx 10,55$
Cécile pourra déguster son gâteau après 18 minutes.

```
def seuil():
    n=0
    T=-19
    while T<10 :
        T=0.94*T+25
        n=n+1
    return n
```