Correction contrôle de mathématiques

Du mercredi 28 septembre 2022

EXERCICE 1

QCM **(5 points)**

1) **Réponse d**

$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \dfrac{1}{2}u_n + 1 - 2 = \dfrac{1}{2}u_n - 1 = \dfrac{1}{2}(u_n - 2) = \dfrac{1}{2}v_n$

$\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{1}{2}$, (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -2$.

2) **Réponse c**

$w_2 = 2w_1 - 4 = 2(2w_0 - 4) - 4 = 4w_0 - 8 - 4 = 4w_0 - 12 \Rightarrow w_0 = \dfrac{w_2 + 12}{4} = \dfrac{8 + 12}{4} = 5$

3) **Réponse c**

Soit u_n : quantité d'eau restante en litre après n heures.

On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - 0,15u_n = 0,85u_n$.

La suite (u_n) est géométrique de raison 0,85 et de premier terme $u_0 = 1$.

Donc $u_n = 0,85^n$, le problème revient à résoudre $0,85^n < 0,25$

Par tâtonnement on trouve : $0,85^8 \approx 0,272$ et $0,85^9 \approx 0,232$.

4) **Réponse b**

Soit $S = 38 + 45 + 52 + 59 + \cdots + 1676$

s est la somme des termes d'une suite arithmétique de raison 7 et de premier terme 38.

Nombre de termes : $\dfrac{1676 - 38}{2} + 1 = 235$. D'où $S = 235 \times \dfrac{38 + 1676}{2} = 201\,395$.

5) **Réponse a**

On calcule $u_1 = \dfrac{1}{2}u_0 + 3 = \dfrac{1}{2} \times 6 + 3 = 6$ donc $u_1 = u_0$.

De proche en proche, on déduit que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n$

On peut éventuellement faire une récurrence.

EXERCICE 2

Suite homographique **(5 points)**

1) a) $u_1 = \dfrac{u_0}{1 + u_0} = \dfrac{1}{2}$, $u_2 = \dfrac{u_1}{1 + u_1} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$

$u_3 = \dfrac{u_2}{1 + u_2} = \dfrac{\frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4}$

b) On peut conjecturer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1}{n + 1}$.

c) On obtient le programme suivant

```
def u(n):
    u=1
    for i in range(1,n+1):
        u=u/(1+u)
    return u
```

2) a) $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1+u_n}{u_n} - \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{u_n}{u_n} = 1.$

$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - v_n = 1$, donc la suite (v_n) est arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{u_0} = 1$.

b) On en déduit $v_n = v_0 + nr = 1 + n$ donc $u_n = \dfrac{1}{v_n} = \dfrac{1}{n+1}$

Exercice 3

Traitement d'une maladie **(5,5 points)**

1) a) $u_1 = u_0 - 0,3u_0 + 1,8 = 0,7u_0 + 1,8 = 0,7 \times 2 + 1,8 = 3,2.$

Il y a 3,2 mg de médicament dans le sang après l'injection de la première heure.

b) Le coefficient 0,7 exprime le pourcentage de médicament restant dans le sang après 1 heure et 1,8 l'injection de la dose de la $(n+1)$-ième heure.

2) a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = 0{,}7u_n + 1{,}8 - 6 = 0{,}7u_n - 4{,}2 = 0{,}7\left(u_n - \dfrac{4{,}2}{0{,}7}\right) = 0{,}7(u_n - 6) = 0,7v_n$

$\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 0,7$, la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,7$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 6 = -4$.

b) $v_n = v_0\, q^n = -4 \times 0,7^n$ d'où $u_n = v_n + 6 = 6 - 4 \times 0,7^n$.

c) Calculons d'abord de temps nécessaire après la dernière injection pour avoir une quantité de médicament supérieure ou égale à 5,5 mg.

$u_n \geqslant 5,5 \ \Rightarrow\ 6 - 4 \times 0,7^n \geqslant 5,5 \ \Rightarrow\ -4 \times 0,7^n \geqslant -0,5 \ \Rightarrow\ 0,7^n \leqslant 0,125.$

Par tâtonnement, on trouve : $0,7^5 \approx 0,168$ et $0.7^6 \approx 0,118$.

Il faudra 6 heures pour que la quantité de médicament dans le sang soit supérieure ou égale à 5,5 mg.

En comptant l'injection initiale, il faudra donc effectuer 7 injections.

Exercice 4

Une suite définie par une somme de termes **(4,5 points)**

1) $u_1 = \dfrac{1}{\sqrt{1}} - 1 = 0 \quad , \quad u_2 = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} - 2 \approx -0,293 \quad , \quad u_3 = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} - 3 \approx -0,716.$

2) $$u_{n+1} = \underbrace{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}}_{=u_n+n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - (n+1) = u_n + n + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - n - 1$$

$$= u_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 1$$

3) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - 1$, on a les inégalités suivantes :

$$n \geqslant 1 \overset{+1}{\Rightarrow} n+1 \geqslant 2 \overset{\sqrt{\ }\nearrow}{\Rightarrow} \sqrt{n+1} \geqslant \sqrt{2} \overset{\uparrow(-1)\searrow}{\Rightarrow} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \overset{-1}{\Rightarrow}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} - 1 \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 1 \leqslant \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} < 0$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n < 0$, la suite (u_n) est décroissante.

4) On peut proposer le programme suivant :

```
from math import*
def u(n):
    u=1
    for i in range(2,n+1):
        u=u+1/sqrt(i)-1
    return u
```