Devoir de mathématiques

À rendre le lundi 7 novembre 2022

Exercice 1

Récurrence **(3 points)**

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $\begin{cases} u_1 = 0,5 \\ u_{n+1} = 0,6u_n + 0,24 \end{cases}$

1) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}$.
2) Que peut-on dire sur la convergence de la suite (u_n). Justifier.

Exercice 2

Limites de suites **(5 points)**

1) Déterminer les limites des suites (u_n) suivantes en vous justifiant précisément :

a) $u_n = \dfrac{2n - 3n^2}{(1-n)^2}$

b) $u_n = \dfrac{2n^2 - 3}{1 - n} + 2n + 2$

c) $u_n = \sqrt{n} - 1 + 3(-1)^n$

d) $u_n = \dfrac{0,5^n}{1 - 3 \times 0,8^n}$

2) Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ telle que $1 + \left(\dfrac{1}{4}\right)^n \leqslant v_n \leqslant 2 - \dfrac{n}{n+1}$.

Peut-on affirmer que la suite (v_n) converge ? On se justifiera.

Exercice 3

Développement d'une bactérie **(7 points)**

On s'intéresse au développement d'une bactérie. On modélise son développement avec les hypothèses suivantes : cette bactérie a une probabilité $0,3$ de mourir sans descendance et une probabilité $0,7$ de se diviser en deux bactéries filles.
Dans le cadre de cette expérience, on admet que les lois de reproduction des bactéries sont les mêmes pour toutes les générations de bactéries qu'elles soient mère ou fille.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle p_n la probabilité d'obtenir au plus n descendances pour une bactérie.

On admet que, d'après ce modèle, la suite (p_n) est définie par $\begin{cases} p_0 = 0,3 \\ p_{n+1} = 0,3 + 0,7p_n^2 \end{cases}$

1) a) Déterminer les valeurs exactes de p_1 et p_2 et interpréter ces valeurs dans le contexte de l'énoncé.

b) Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, d'obtenir au moins 11 générations de bactéries à partir d'une bactérie de ce type ? Justifier.

c) Formuler des conjectures, en se justifiant, sur les variations et la convergence de la suite (p_n).

Pour les questions 1b) et 1c) on pourra utiliser un tableau de valeurs ou un programme Python de la calculatrice pour se justifier.

2) a) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant 0,5$.

   b) En déduire que la suite (p_n) est convergente.

3) On appelle ℓ la limite de la suite (p_n).

   a) Justifier que ℓ est solution de l'équation $0,7x^2 - x + 0,3 = 0$.

   b) Déterminer alors la limite de la suite (p_n).

4) La fonction, écrite en Python, a pour objectif de renvoyer les n premiers termes de la suite (p_n).

   a) Que fait l'opérateur ".append" sur la liste "L" ?

   b) Recopier, sur votre copie, cette fonction en complétant les lignes 2, 4, 5 de façon à ce que la fonction suite(n) retourne, sous forme de liste, les n premiers termes de la suite.

```
1 def suite(n):
2     p=...
3     L=[p]
4     for i in range(...) :
5         p=...
6         L.append(p)
7     return L
```

EXERCICE 4

Suites **(5 points)**

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{-7u_n - 8}{2u_n + 1}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2}$.

1) a) Recopier et compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4
u_n	1				
v_n					

   b) Que peut-on conjecturer sur la nature de la suite (v_n) ? Pourquoi ?

2) Montrer que la suite (v_n) est arithmétique dont on précisera la raison.
   En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

3) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?