Correction du devoir

Du lundi 7 novembre 2022

EXERCICE 1

Récurrence **(3 points)**

1) **Initialisation :** $n=1,\ 0,6-0,1\times 0,6^0 = 0,6-0,1 = 0,5 = u_1$
La proposition est initialisée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $u_n = u_n = 0,6-0,1\times 0,6^{n-1}$, montrons que $u_{n+1} = u_n = 0,6-0,1\times 0,6^n$.

$$u_{n+1} = 0,6u_n + 0,24 \overset{\text{HR}}{=} 0,6(0,6-0,1\times 0,6^{n-1} + 0,24 = 0,36 - 0,1\times 0,6^n + 0,24$$
$$= 0,6-0,1\times 0,6^n \quad \text{La proposition est héréditaire.}$$

Par initialisation et hérédité : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 0,6-0,1\times 0,6^{n-1}$.

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,6^{n-1} = 0$ car $-1 < 0,6 < 1$, par produit et somme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0,6$
La suite (u_n) converge vers 0,6.

EXERCICE 2

Limites de suites **(5 points)**

1) a) $u_n = \dfrac{2n-3n^2}{(1-n)^2} = \dfrac{2n-3n^2}{1-2n+n^2} \overset{\div n^2}{=} \dfrac{\frac{2}{n}-3}{\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n}+1}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n} - 3 = -3 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{2}{n} + 1 = 1 \end{array}\right\} \overset{\text{par quotient}}{\Rightarrow} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -3$$

b) $u_n = \dfrac{2n^2-3}{1-n} + 2n + 2 = \dfrac{2n^2-3+(1-n)(2n+2)}{1-n} = \dfrac{2n^2-3+2n+2-2n^2-2n}{1-n}$
$= \dfrac{-1}{1-n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 1-n = -\infty \overset{\text{par quotient}}{\Rightarrow} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.$

c) $\forall n \in \mathbb{N},\ \sqrt{n} - 1 + 3(-1)^n \geqslant \sqrt{n} - 4.$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} - 4 = +\infty$, d'après le théorème de comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,5^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,8^n = 0$ car $-1 < 0,5 < 0,8 < 1$.

Par produit, somme et quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{4}\right)^n = 0$ car $-1 < \dfrac{1}{4} < 1$ par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \left(\dfrac{1}{4}\right)^n = 1$

$\dfrac{n}{n+1} \overset{\div n}{=} \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}} \overset{\text{par quotient}}{\Rightarrow} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$ et par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 - \dfrac{n}{n+1} = 1.$

D'après le théorème de gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$ donc la suite (v_n) converrge vers 1.

EXERCICE 3

Développement d'une bactérie **(7 points)**

1) a) $p_1 = 0,3 + 0,7 \times 0,3^2 = 0,363$ et $p_2 = 0,3 + 0,7(0,363)^2 \approx 0,392\,238\,3$.

Pour cette bactérie, la probabilité d'obtenir au plus une descendante est de 0,363 et d'obtenir au plus deux descendantes est à peu près 0,392.

b) On peut faire le programme suivant.

```
def p(n):
    p=0.3
    for i in range(n):
        p=0.3+0.7*p**2
    return p
```

On trouve alors $p_{10} \approx 0,428$
La probabilité d'obtenir au plus 10 générations est de 0,428 donc d'obtenir au moins 11 générations est de $1 - p_{10} \approx 0,572$

c) On peut calculer $p_{20} \approx 0,429$ et $p_{50} \approx 0,429$ à 10^{-3} près..

On peut conjecturer que la suite (p_n) est croissante et converge vers 0,429 à 10^{-3} près.

2) a) **Initialisation :** $n = 0$, on a $0 \leqslant 0,3 \leqslant 0,363 < 0,5$. La proposition est initialisée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 \leqslant p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant 0,5$,
montrons que $0 \leqslant p_{n+1} \leqslant p_{n+2} \leqslant 0,5$.

HR : $0 \leqslant p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant 0,5$ comme la fonction carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a :

$$0 \leqslant p_n^2 \leqslant p_{n+1}^2 \leqslant 0,25 \overset{\times 0,7}{\Rightarrow} 0 \leqslant 0.7 \times p_n^2 \leqslant 0.7 \times p_{n+1}^2 \leqslant 0,175 \overset{+0,3}{\Rightarrow}$$
$$0,3 \leqslant 0,3 + 0,7 \times p_n^2 \leqslant 0,3 + 0,7 \times p_{n+1}^2 \leqslant 0,475 \Rightarrow 0 \leqslant 0,3 \leqslant p_{n+1} \leqslant p_{n+2} \leqslant 0,475 \leqslant 0,5$$

La proposition est héréditaire.

Par initialisation et hérédité $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant 0,5$.

b) La suite (p_n) est croissante ($\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n \leqslant p_{n+1}$) et majorée par 0,5, d'après le théorème des suites monotone, la suite (p_n) converge vers ℓ telle que $0,3 \leqslant \ell \leqslant 0,5$

3) a) La fonction f telle que $f(x) = 0,3 + 0.7x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$, comme la suite (p_n) est convergente, d'après le théorème du point fixe, ℓ est solution de $f(x) = x$.

$f(x) = x \Leftrightarrow 0,3 + 0,7x^2 = x \Leftrightarrow 0,7x^2 - x + 0,3 = 0.$

Donc ℓ est solution de l'équation $0,7x^2 - x + 0,3 = 0$.

b) Soit l'équation (E) : $0,7x^2 - x + 0,3 = 0$

$x_1 = 1$ racine évidente et $P = \dfrac{0,3}{0,7} = \dfrac{3}{7}$ donc $x_2 = \dfrac{3}{7}$.

Comme $0,3 \leqslant \ell \leqslant 0,5$, la limite $\ell = \dfrac{3}{7} \approx 0,429$

4) a) "L.append(p)" rajoute le nombre p à la fin de la liste "L".

b) On obtient le programme suivant :

```
def suite(n):
    p=0.3
    L=[p]
    for i in range(n) :
        p=0.3+0.7*p**2
        L.append(p)
    return L
```

EXERCICE 4

Suites **(5 points)**

1) a) On obtient le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4
u_n	1	-5	-3	$-\dfrac{13}{5}$	$-\dfrac{17}{7}$
v_n	1	3	5	7	9

b) On peut conjecturer que la suite (v_n) est arithmétique de raison 2 car les premiers termes 1, 3, 5, 7, 9 sont en progression arithmétique de raison 2.

2) $$v_{n+1} = \frac{2u_{n+1}+1}{u_{n+1}+2} = \frac{\dfrac{2(-7u_n-8)}{2u_n+1}+1}{\dfrac{-7u_n-8}{2u_n+1}+2} \overset{\times(2u_n+1)}{=} \frac{-14u_n-16+2u_n+1}{-7u_n-8+4u_n+2} = \frac{-12u_n-15}{-3u_n-6}$$

$$\overset{\div -3}{=} \frac{4u_n+5}{u_n+2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad v_{n+1}-v_n = \frac{4u_n+5}{u_n+2} - \frac{2u_n+1}{u_n+2} = \frac{2u_n+4}{u_n+2} = 2$$

La suite (v_n) est arithmétique de raison $r = 2$ d'où $v_n = v_0 + nr = 1 + 2n$.

$$v_n = \frac{2u_n+1}{u_n+2} \Rightarrow u_nv_n + 2v_n = 2u_n + 1 \Rightarrow u_n(v_n-2) = 1-2v_n \Rightarrow u_n = \frac{1-2v_n}{v_n-2}$$

On en déduit alors que : $u_n = \dfrac{1-2-4n}{1+2n-2} = \dfrac{-1-4n}{2n-1}$

3) $u_n = \dfrac{-1-4n}{2n-1} \overset{\div n}{=} \dfrac{-\dfrac{1}{n}-4}{2-\dfrac{1}{n}}$. On a alors : $\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n}-4 = -4 \\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2-\frac{1}{n} = 2 \end{array}\right\} \overset{\text{par quotient}}{\Longrightarrow} \displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = -2$

La suite (u_n) converge vers -2.