Correction contrôle de mathématiques

Du lundi 28 novembre 2022

Exercice 1

QCM **(5 points)**

1) **Réponse c)** $f(x) \overset{\div x^2}{=} \dfrac{-2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x^2}}$ donc $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -2$,
d'où une asymptote horizontale d'équation $y=-2$.

2) **Réponse a)** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ par somme et quotient $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x+1}{e^x-1} = -1$

3) **Réponse c)** $\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to0} -\frac{1}{x^2} = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \end{array}\right\}$ Par composition $\displaystyle\lim_{x\to0} f(x) = 0 = f(0)$ $\Rightarrow$ f continue en 0.

a) et b) sont fausse car $\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} -\frac{1}{x^2} = 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to0} e^x = 1 \end{array}\right\}$ Par composition $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$

4) **Réponse b)** $f'(x) = \dfrac{1e^x - xe^x}{(e^x)^2} = \dfrac{e^x(1-x)}{e^{2x}} = (1-x)e^{-x}$.

5) **Réponse d)** Si l'on dresse le tableau de variation à partir du signe de la fonction dérivée tracée, on a :

x	-2		-1		1		3		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Selon ce tableau seule la proposition **d)** est vraie (minimum en 3).

Exercice 2

Équation du troisième degré **(5 points)**

$f(x) = -x^3+3x+9$

1) $f(x) = x^3\left(-1+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{9}{x^3}\right)$ d'où $\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} -1+\frac{3}{x^2}+\frac{9}{x^3} = -1 \end{array}\right\} \overset{\text{produit}}{\Rightarrow} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

2) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car f est un polynôme.
$f'(x) = -3x^2+3 = 3(1-x^2) = 3(1-x)(1+x)$

3) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	7	$\nearrow$	11	$\searrow$	$-\infty$

4) • Sur $]-\infty\,;\,1[$, $f(x) \geqslant 7$ donc f ne peut s'annuler.

• Sur $[1\,;+\infty[$, f est continue (car dérivable), monotone (décroissante) et change de signe car $f(1)=11$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. D'après le TVI, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α.

• Conclusion : l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

5) On peut calculer $f(3) = -9$ donc f change de signe sur l'intervalle $[1\,;\,3]$.
À l'aide l'algorithme de dichotomie, on trouve : $2,553 < \alpha < 2,554$.

D'après le tableau de variation, on a :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

EXERCICE 3

Limites **(5 points)**

1) Soit $\dfrac{x^2+3}{1-x} \overset{\div x}{=} \dfrac{x+\dfrac{3}{x}}{\dfrac{1}{x}+1}$ d'où $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x+\dfrac{3}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} - 1 = -1\end{array}\right\}$ Par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+3}{1-x} = -\infty$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ par produits, sommes et quotient $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3-5e^x}{1+2e^x} = 3$.

3) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0} e^x - 2 = -1 \\ \lim\limits_{x\to0} x^2 = 0^+\end{array}\right\}$ Par quotient $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x-2}{x^2} = -\infty$

4) $\lim\limits_{x\to+2^+} x-2 = 0^+ \overset{\text{quotient}}{\Rightarrow} \lim\limits_{x\to+2^+} \dfrac{3}{x-2} = +\infty$.

or $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ par composition $\lim\limits_{x\to+2^+} \sqrt{\dfrac{3}{x-2}} = +\infty$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{1}{x} = 1$

D'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

EXERCICE 4

Fonction rationnelle **(5 points)**

1) On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$.

$\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x=1$.

2) $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{(x-1)^2} = \dfrac{(x-1)^2-1}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2} = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$.

3) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$ et signe $f'(x) =$ signe $x(x-2)$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	$+$		
$f(x)$			-4		‖ $+\infty$				$+\infty$
	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$ $-\infty$	‖	$\searrow$	0	$\nearrow$	

4) $f(3) = \dfrac{1}{2}$ et $f'(3) = \dfrac{3}{4}$ d'où :

$T_3 \ : \ y = f'(3)(x-3) + f(3) \Leftrightarrow y = \dfrac{3}{4}(x-3) + \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow y = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{7}{4}$

5) $f'(x) = 2 \Leftrightarrow \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 2x^2 - 4x + 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = 0$

$\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$ pas de solution.

La courbe $\mathscr{C}_f$ n'admet pas de tangente parallèle à la droite d'équation $y = 2x - 3$.