Contrôle de mathématiques

Mercredi 12 avril 2023

Exercice 1

QCM **(5 points)**

Pour chacune des cinq questions suivantes,une seule des quatre réponses proposées est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3\,e^{-\frac{x}{2}}$.
   Une primitive F sur $\mathbb{R}$ de f a pour expression :

   a) $F(x) = 3\,e^{-\frac{x}{2}}$ b) $F(x) = \dfrac{3}{2}\,e^{-\frac{x}{2}}$ c) $F(x) = -\dfrac{3}{2}\,e^{-\frac{x}{2}}$ d) $F(x) = -6\,e^{-\frac{x}{2}}$

2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = 2t^2 - 1$.
   La primitive F de f telle que $F(3) = 10$ a pour expression

   a) $F(t) = 2t^3 - t - 41$ c) $F(t) = \dfrac{2}{3}t^3 - t - 5$

   b) $F(t) = \dfrac{2}{3}t^3 - t - 10$ d) $F(t) = \dfrac{2}{3}t^3 - t + 5$

3) Soit la fonction f définie sur $]1\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x}{(1-x^2)^2}$.
   Une primitive F sur $]1\,;+\infty[$ de f a pour expression :

   a) $F(x) = \dfrac{-2}{x^2-1}$ c) $F(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$

   b) $F(x) = \dfrac{-1}{2(x^2-1)}$ d) $F(x) = \dfrac{1}{2(x^2-1)}$

4) Soit la fonction définie sur $]-1\,;\,1[$ par : $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$
   Une primitive F de f sur $]-1\,;\,1[$ a pour expression :

   a) $F(x) = \ln(x^2-1)$ c) $F(x) = 2\ln(1-x^2)$

   b) $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2-1)$ d) $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln(1-x^2)$

5) Soit l'équation différentielle : $y' = -3y + 4$.
   Les solutions de l'équation sont de la forme :

   a) $y(x) = k\,e^{3x} + \dfrac{4}{3},\ k \in \mathbb{R}$ c) $y(x) = k\,e^{-3x} + \dfrac{4}{3},\ k \in \mathbb{R}$

   b) $y(x) = k\,e^{-3x} - \dfrac{4}{3},\ k \in \mathbb{R}$ d) $y(x) = e^{-3x} + \dfrac{4k}{3},\ k \in \mathbb{R}$

EXERCICE 2

Primitive et équation différentielle **(4 points)**

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+2x+6}$
   a) Déterminer une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   b) Déterminer la primitive de f qui s'annule en 0.
2) Soit l'équation différentielle (E) définie sur $\mathbb{R}$ par : $y' + 5y = 3$.
   a) Déterminer toutes les solutions de l'équation (E).
   b) Déterminer la solution f qui prend la valeur 0 en 0.

EXERCICE 3

Loi de Newton **(6 points)**

Soit $\theta(t)$ la température, exprimée en °C, d'un corps à l'instant t, exprimé en minutes.

À l'instant $t = 0$, le corps à une température de 150°C, est placé dans une pièce à 20°C.

D'après la loi de Newton, la vitesse de refroidissement $\theta'(t)$ est proportionnelle à la différence entre la température du corps et celle de la pièce.
On admet que le coefficient de proportionnalité est $a = -0,074$.

1) Justifier la fonction θ vérifie l'équation : $\theta' = -0,074\,\theta + 1,48$.
2) En déduire l'expression de $\theta(t)$ en tenant compte de la condition initiale.
3) a) Déterminer le sens de variation de la fonction θ sur $[0\,;+\infty[$.
   b) Calculer la limite de θ en $+\infty$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.
4) Déterminer la température du corps, arrondie au degré, au bout de 20 minutes.
5) Déterminer la valeur exacte puis une valeur approchée à la seconde près, du temps au bout duquel la température du corps sera de 30°C.
6) On estime que le corps ne refroidit plus si sa température se trouve à moins de 1°C de la température de la pièce. Recopier et compléter le programme python suivant qui donne le temps à la minute près au bout duquel le corps ne refroidit plus.
   Donner la valeur retournée par ce programme.

```
from math import*
t=0
T=...
while ......:
    t=...
    T=......
print(...)
```

EXERCICE 4

Équation différentielle avec second membre variable **(5 points)**

Soit l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = e^{2x}$.

1) Démontrer que la fonction p définie par $p(x) = xe^{2x}$ est une solution de (E).
2) a) Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y' - 2y = 0$.
   b) Démontrer qu'une fonction y est solution de (E) si et seulement si $(y-p)$ est solution de (E_0).
   c) En déduire toutes les solutions de (E).
3) Déterminer la fonction f, solution de (E), qui prend la valeur 1 en 0.