Correction contrôle de mathématiques

Du mercredi 12 avril 2023

Exercice 1

QCM **(5 points)**

1) **Réponse d** : $F(x) = -6\,e^{-\frac{x}{2}} \Rightarrow F'(x) = -6\left(-\dfrac{1}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}} = 3\,e^{-\frac{x}{2}}$

2) **Réponse c** : $F(x) = \dfrac{2}{3}t^3 - t + k$, d'où $F(3) = 10 \Rightarrow 18 - 3 + k = 10 \Rightarrow k = -5$.

3) **Réponse b** : $f(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2x}{(x^2-1)^2} \Rightarrow F(x) = \dfrac{-1}{2(x^2-1)}$.

4) **Réponse d** : $f(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2x}{x^2-1} \Rightarrow F(x) = \dfrac{1}{2}\ln|x^2-1| \overset{x\in]-1\,;\,1[}{=} \dfrac{1}{2}\ln(1-x^2)$

5) **Réponse c** : Les solutions de $y' = ay + b$ sont de la forme $y(x) = k\,e^{ax} - \dfrac{b}{a}$.

Exercice 2

Primitive et équation différentielle **(4 points)**

1) a) $f(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2x+2}{x^2+2x+6}$ de la forme $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{u'}{u}$. Donc les primitives sont de la forme :

$F(x) = \dfrac{1}{2}\ln|x^2+2x+6| + k \overset{\Delta=-20}{=} \dfrac{1}{2}\ln(x^2+2x+6) + k$.

b) $F(0) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\ln 6 + k = 0 \Leftrightarrow k = -\dfrac{1}{2}\ln 6$ donc $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+2x+6) - \dfrac{1}{2}\ln 6$.

2) a) $y' = -5y + 3$, les solutions sont de la forme : $y(x) = k\,e^{-5x} + \dfrac{3}{5}$, $k \in \mathbb{R}$.

b) $y(0) = 0 \Leftrightarrow k + \dfrac{3}{5} = 0 \Leftrightarrow k = -\dfrac{3}{5}$ d'où $f(x) = \dfrac{3}{5}\left(1 - e^{-5x}\right)$

Exercice 3

Loi de Newton **(6 points)**

1) D'après la loi de Newton : $\theta' = a(\theta - 20) \overset{a=-0,074}{\Leftrightarrow} \theta' = -0,074\,\theta + 1,48$.

2) Les solutions sont de la forme : $\theta(t) = k\,e^{-0,074t} + \dfrac{1,48}{0,074} \Leftrightarrow \theta(t) = k\,e^{-0,074t} + 20$.

$\theta(0) = 150 \Leftrightarrow k + 20 = 150 \Leftrightarrow k = 130$ donc $\theta(t) = 130\,e^{-0,074t} + 20$.

3) a) $\forall t \in [0\,;+\infty[$, $\theta'(t) = -(130 \times 0,074)\,e^{-0,074t} = -9,62\,e^{-0,074t} < 0$.

La fonction θ est décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t\to+\infty} -0,074t = -\infty \\ \lim\limits_{t\to-\infty} e^t = 0 \end{array}\right\}$ par composition $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0,074t} = 0$, par somme et produit $\lim\limits_{t\to+\infty} \theta(t) = 20$.

Après un grand laps de temps, la température du corps se stabilise à 20°C.

4) $\theta(20) = 130\,e^{-1,48} + 20 \approx 49,59$.
la température du corps, au degré près, au bout de 20 minutes est de 50°C.

5) $130\,e^{-0,074t} + 20 = 30 \;\Leftrightarrow\; e^{-0,074t} = \dfrac{1}{13} \overset{\ln}{\Leftrightarrow} -0,074t = \ln\dfrac{1}{13} \;\Leftrightarrow\; t = \dfrac{-1}{0,074}\ln\dfrac{1}{13}$.
On obtient $t \approx 34,66$ soit 34 minutes et 40 secondes.

6) Le programme retourne : 66.
On peut considérer qu'à partir 1 h 06' le corps est refroidi.

```
from math import*
t=0
T=150
while T-20>=1:
    t=t+1
    T=130*exp(-0.074*t)+20
print(t)
```

Exercice 4

Équation différentielle avec second membre variable **(5 points)**

Soit l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = e^{2x}$.

1) $\forall x \in \mathbb{R},\; p'(x) - 2p(x) = e^{2x} + 2xe^{2x} - 2xe^{2x} = e^{2x}$.
La fonction p est donc solution de (E).

2) a) Les solutions de (E_0), $y' = 2y$, sont de la forme : $y(x) = k\,e^{2x}$.

b) Soit y une solution de (E), on a donc : $\begin{cases} y' - 2y = e^{2x} \\ p' - 2p = e^{2x} \end{cases}$

Par soustraction termes à terme, on trouve $(y-p)' - 2 \Leftrightarrow (y-p) = 0$.
La fonction $(y-p)$ vérifie E_0.
Réciproquement si $(y-p)$ vérifie E_0 alors de façon immédiate y vérifie (E).

c) Les solutions de (E) sont de la forme :

$$y(x) - p(x) = k\,e^{2x} \;\Leftrightarrow\; y(x) = k\,e^{2x} + x\,e^{2x} = e^{2x}(k+x)$$

3) $f(0) = 1 \;\Leftrightarrow\; k = 1$ donc $f(x) = e^{2x}(x+1)$.