Contrôle de mathématiques

Lundi 23 janvier 2023

Exercice 1

Salariés dans une entreprise **(9 points)**

Les résultats seront arrondis si besoin à 10^{-4} *près*

Une étude statistique réalisée dans une entreprise fournit les informations suivantes :

- 48 % des salariés sont des femmes dont 16,5 % exercent une profession de cadre ;
- Parmi les homme, 21,5 % exercent une profession de cadre.

On choisit une personne de l'entreprise au hasard. On considère les évènements suivants :

- F : « la personne choisie est une femme » ;
- C : « la personne choisie exerce une profession de cadre ».

1) Représenter la situation par un arbre pondéré.
2) Calculer la probabilité que la personne choisie soit une femme qui exerce une profession de cadre.
3) a) Démontrer que la probabilité que la personne choisie exerce une profession de cadre est égale à $0,191$.

   b) Les évènements F et C sont-ils indépendants ? Justifier.
4) Calculer la probabilité de F sachant C, notée $p_{\text{C}}(\text{F})$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
5) On choisit au hasard un échantillon de 15 salariés. Le grand nombre de salariés dans l'entreprise permet d'assimiler ce choix à un tirage avec remise.

   On note X la variable aléatoire donnant le nombre de cadres au sein de l'échantillon de 15 salariés. On rappelle que la probabilité qu'un salarié choisi au hasard soit un cadre est égale à $0,191$.

   a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

   b) Calculer la probabilité que l'échantillon contienne au plus 1 cadre.

   c) Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X.
6) Soit n un entier naturel.

   On considère dans cette question un échantillon de n salariés.

   Quelle doit être la valeur minimale de n pour que la probabilité qu'il y ait au moins un cadre au sein de l'échantillon soit supérieure ou égale à $0,99$?

Exercice 2

Compagnie aérienne **(11 points)**

Partie 1

Julien doit prendre l'avion ; il a prévu de prendre le bus pour se rendre à l'aéroport.
S'il prend le bus de 8 h, il est sûr d'être à l'aéroport à temps pour son vol.
Par contre, le bus suivant ne lui permettrait pas d'arriver à temps à l'aéroport.

Julien est parti en retard de chez lui et la probabilité qu'il manque son bus est de $0,8$.
S'il manque son bus, il se rend à l'aéroport en prenant une compagnie de voitures privées ; il a alors une probabilité de $0,5$ d'être à l'heure à l'aéroport.

On notera :

- B l'évènement : « Julien réussit à prendre son bus » ;
- V l'évènement : « Julien est à l'heure à l'aéroport pour son vol ».

1) Donner la valeur de $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{V})$.
2) Représenter la situation par un arbre pondéré.
3) Montrer que $p(\mathrm{V}) = 0,6$.
4) Si Julien est à l'heure à l'aéroport pour son vol, quelle est la probabilité qu'il soit arrivé à l'aéroport en bus ? Justifier.

Partie 2

Les compagnies aériennes vendent plus de billets qu'il n'y a de places dans les avions car certains passagers ne se présentent pas à l'embarquement du vol sur lequel ils ont réservé. On appelle cette pratique le surbooking.
Au vu des statistiques des vols précédents, la compagnie aérienne estime que chaque passager a 5 % de chance de ne pas se présenter à l'embarquement.
Considérons un vol dans un avion de 200 places pour lequel 206 billets ont été vendus. On suppose que la présence à l'embarquement de chaque passager est indépendante des autres passagers et on appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de passagers se présentant à l'embarquement.

1) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2) En moyenne, combien de passagers vont-ils se présenter à l'embarquement ?
3) Calculer la probabilité que 201 passagers se présentent à l'embarquement. Le résultat sera arrondi à 10^{-3} près.
4) Calculer $p(X \leqslant 200)$, le résultat sera arrondi à 10^{-3} près. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
5) La compagnie aérienne vend chaque billet à 250 euros.
   Si plus de 200 passagers se présentent à l'embarquement, la compagnie doit rembourser le billet d'avion et payer une pénalité de 600 euros à chaque passager lésé.
   On appelle :
   - Y : la variable aléatoire égale au nombre de passagers qui ne peuvent pas embarquer bien qu'ayant acheté un billet ;
   - C : la variable aléatoire qui totalise le chiffre d'affaire de la compagnie aérienne sur ce vol.

   On admet que Y suit la loi de probabilité, à 10^{-5} près, donnée par le tableau suivant :

y_i	0	1	2	3	4	5	6
$p\,(Y = y_i)$	0,947 75	0,030 63	0,014 41	0,005 39	0,001 51	0,000 28	

   a) Compléter la loi de probabilité de Y donnée en calculant $p(Y = 6)$ à 10^{-5} près.
   b) Justifier que : $C = 51\,500 - 850Y$.
   c) Calculer l'espérance de la variable aléatoire Y à 10^{-5} près.
      En déduire l'espérance de la variable aléatoire C à l'euro près.
   d) Comparer le chiffre d'affaires obtenu en vendant exactement 200 billets et le chiffre d'affaires moyen obtenu en pratiquant le surbooking.