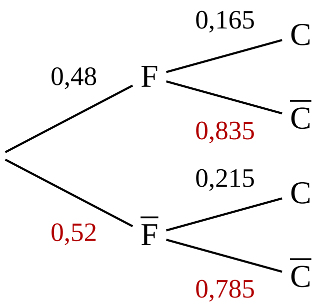
Correction contrôle de mathématiques
Du lundi 23 janvier 2023

EXERCICE 1

Salariés dans une entreprise **(9 points)**

1) D'après l'énoncé, on a $p(\text{F}) = 0,48$, $p_{\text{F}}(\text{C}) = 0,165$ et $p_{\overline{\text{F}}}(\text{C}) = 0,215$. D'où :



2) $p(\text{F} \cap \text{C}) = p(\text{F}) \times p_{\text{F}}(\text{C}) = 0,48 \times 0,165 = 0,0792$

3) a) $p(\text{C}) = p(\text{C}\cap\text{F})+p(\text{C}\cap\overline{\text{F}}) = 0,0792+p(\overline{\text{F}})\times p_{\overline{\text{F}}}(\text{C}) = 0,0792+0,52\times 0,215 = 0,191$

b) $p_{\text{F}}(\text{C}) = 0,165$ et $p(\text{C}) = 0,191$ donc $p_{\text{F}}(\text{C}) \neq p(\text{C})$.
Les évènements F et C ne sont pas indépendants.

4) $p_{\text{C}}(\text{F}) = \dfrac{p(\text{F} \cap \text{F})}{p(\text{C})} = \dfrac{0,0792}{0,191} \approx 0,4147$. Il y a 41,47 % de femmes parmi les cadres.

5) a) Soit l'expérience « on tire au hasard une personne de l'entreprise » et l'on appelle succès « la personne est un cadre » de probabilité $p = 0,191$.
On réitère 15 fois cette expérience de façon identique et indépendante (assimilable à un tirage avec remise) et on appelle X la variable aléatoire associée au nombre de succès. X suit alors la loi binomiale $\mathscr{B}(15\,;\ 0,191)$.

b) $p(X \leqslant 1) = p(X = 0) + p(X = 1) = \text{binomFrép}(15\,,\ 0.191\,,\ 1) \approx 0,1890$.

c) $\text{E}(X) = np = 15 \times 0,191 = 2,865$.

6) Soit Y la variable aléatoire donnant le nombre de cadres sur n salariés. Y suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;\ 0,191)$.

On a alors $p(Y \geqslant 1) = 1 - p(Y = 0) = 1 - 0,809^n$.

$$p(Y \geqslant 1) \geqslant 1 \iff 1 - 0,809^n \geqslant 0,99 \iff 0,809^n \leqslant 0,01 \overset{\ln\nearrow}{\iff} n\ln 0,809 \leqslant \ln 0,01$$
$$\overset{\ln 0,809<0}{\iff} n \geqslant \frac{\ln 0,01}{\ln 0,809} \approx 21,73 \Rightarrow n \geqslant 22$$

Pour $n \geqslant 22$, il y a au moins 99 % de chance d'avoir au moins un cadre au sein de l'échantillon.

EXERCICE 2

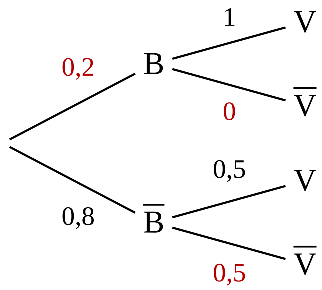
Compagnie aérienne **(11 points)**

Partie 1

D'après l'énoncé on a : $p_{\text{B}}(\text{V}) = 1$, $p(\overline{\text{B}}) = 0,8$ et $p_{\overline{\text{B}}}(\text{V}) = 0,5$.

1) $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{V}) = 1$ car si Julien prend le bus, il est certain d'arriver à l'heure.

2) On obtient l'arbre suivant :



3) $p(\mathrm{V}) = p(\mathrm{V}\cap\mathrm{B}) + p(\mathrm{V}\cap\overline{\mathrm{B}}) = p_{\mathrm{B}} \times p_{\mathrm{B}}(\mathrm{V}) + p(\overline{\mathrm{F}}) \times p_{\overline{\mathrm{F}}}(\mathrm{C}) = 0,2\times 1 + 0,8\times 0,5 = 0,6$

4) On cherche : $p_{\mathrm{V}}(\mathrm{B}) = \dfrac{p(\mathrm{V}\cap\mathrm{B})}{p(\mathrm{V})} = \dfrac{0,2}{0,6} = \dfrac{1}{3}$.

Si Julien est à l'heure à l'aéroport pour son vol, il y a une chance sur 3 qu'il soit arrivé à l'aéroport en bus.

Partie 2

1) Soit l'expérience « on tire au hasard une personne ayant acheté un billet » et l'on appelle succès « la personne est présente à l'embarquement » de probabilité :

$p = 1 - 0,05 = 0,95$.

On réitère 206 fois cette expérience de façon identique et indépendante (assimilable à un tirage avec remise) et on appelle X la variable aléatoire associée au nombre de succès. X suit alors la loi binomiale $\mathscr{B}(206\,;\ 0,95)$.

2) $\mathrm{E}(X) = np = 206\times 0,95 = 195,7$

En moyenne, il y a 195,7 passagers qui se présentent à l'embarquement.

3) $p(X = 201) = \dbinom{206}{201}\times 0,95^{201}\times 0,05^{5} = \text{binomFdp}(206\,,\ 0.95\,,\ 201) \approx 0,031$

4) $p(X \leqslant 200) = \text{binomFrép}(206\,,\ 0.95\,,\ 200) \approx 0,948$.

Il y a quasiment 95 % de chance pour qu'il ne se présente pas plus de passagers à l'embarquement qu'il y a de places dans l'avion.

5) a) $p(Y = 6) = p(X = 206) = \text{binomFdp}(206\,,\ 0.95\,,\ 206) \approx 2,58\times 10^{-5} \approx 3\times 10^{-5}$

y_i	0	1	2	3	4	5	6
$p\,(Y = y_i)$	0,947 75	0,030 63	0,014 41	0,005 39	0,001 51	0,000 28	0,000 03

b) La compagnie vend 206 places à 250 € et pour chaque passager ne pouvant pas prendre l'avion rembourse 250 € et donne une indemnité de 600 €, on a donc :

$C = 206\times 250 - (250 + 600)Y = 51\,500 - 850Y$.

c) $\mathrm{E}(Y) = \sum y_i \times p(Y = y_i) = 0\times 0,947\,75 + \cdots + 6\times 0,000\,03 = 0,083\,24$.

On a alors : $\mathrm{E}(C) = 51\,500 - 850\times 0,083\,24 \approx 51\,429$ à l'euro près.

d) Si la compagnie avait vendu 200 places son chiffre d'affaire aurait été de 200×250 soit 50 000 € contre un chiffre d'affaire moyen en surbooking de 51 429 €.

Le surbooking permet à la compagnie d'augmenter son chiffre d'affaire de 1 429 €.