BACCALAURÉAT BLANC

DE MATHÉMATIQUES

ENS. SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 4 HEURES
Les calculatrices sont AUTORISÉES en mode examen actif

Coefficient : 16

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- *le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.*

TOURNEZ LA PAGE S.V.P.

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

1) Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.
On peut affirmer que :

a. majorée et non minorée.
b. minorée et non majorée.
c. non majorée et non minorée.
d. bornée.

2) Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_{n+1} = \dfrac{e^n}{e^n+1} \times v_n$ et $v_0 = 1$.
On peut affirmer que :

a. (v_n) est strictement croissante.
b. (v_n) est strictement décroissante.
c. (v_n) n'est pas monotone.
d. (v_n) est constante.

3) Soit la suite (w_n) telle que, pour tout entier naturel n non nul : $w_n \leqslant w_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n}$.
On peut affirmer que :

a. La suite (w_n) diverge.
b. La suite (w_n) converge.
c. $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.
d. $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 1$.

Dans les questions 4) et 5), on considère les suites (a_n) et (b_n) définies par :

$$a_0 = 2,\quad b_0 = 1 \text{ et pour tout entier naturel } n : \begin{cases} a_{n+1} = a_n + 3b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$$

4) On peut affirmer que :

a. $\begin{cases} a_2 = 5 \\ b_2 = 3 \end{cases}$
b. $a_2^2 - 3b_2^2 = -2^2$
c. $5a_1 = 3b_1$
d. $\dfrac{a_2}{b_2} = 1,75$

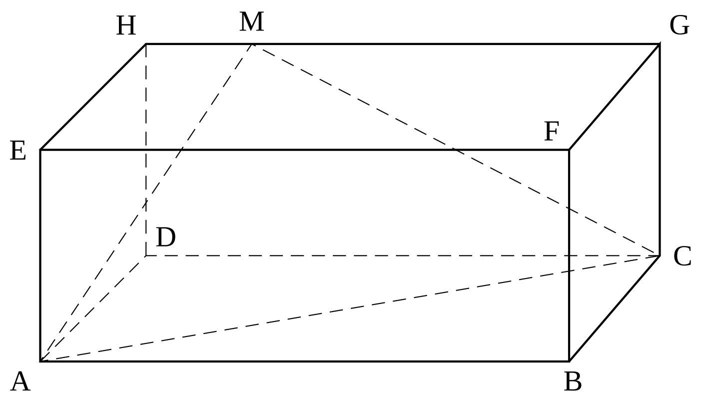
5) On considère le programme ci-dessous écrit en langage Python . Ce programme renvoie :

```
def valeur():
    a=2
    b=0
    for k in range(1,11):
        c=a
        a=a+3*b
        b=c+b
    return u,v
```

a. a_{10} et b_{10}
b. a_{11} et b_{11}
c. a_0 et b_{10}
d. les valeurs de a_n et b_n pour n allant de 1 à 10

EXERCICE 2 (5 points)

ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle tel que AB = 5, AD = 3 et AE = 2.
L'espace est muni d'un repère orthonormé d'origine A dont les points B, D et E ont pour coordonnées B(5 ; 0 ; 0), D(0 ; 3 ; 0) et E(0 ; 0 ; 2).



1) a) Donner, dans le repère considéré, les coordonnées des points H et G.
   b) Donner une représentation paramétrique de la droite (GH).
2) Soit M un point du segment [GH] tel que $\overrightarrow{HM} = k\overrightarrow{HG}$ avec k un réel de l'intervalle [0 ; 1].
   a) Justifier que les coordonnées de M sont $(5k\,;\ 3\,;\ 2)$.
   b) En déduire que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CM} = 25k^2 - 25k + 4$.
   c) Déterminer les valeurs de k pour lesquelles AMC est un triangle rectangle en M.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère que le point M a pour coordonnées (1 ; 3 ; 2).
On admet que le triangle AMC est rectangle en M.

Soit le volume d'un tétraèdre $V = \dfrac{\text{Aire de la base} \times h}{3}$ où h est la hauteur relative à la base.

3) On considère le point K de coordonnées (1 ; 3 ; 0).
   a) Déterminer une équation cartésienne du plan (ACD).
   b) Justifier que le point K est le projeté orthogonal du point M sur le plan (ACD).
   c) En déduire le volume du tétraèdre MACD.
4) On note P le projeté orthogonal du point D sur le plan (AMC).
   Calculer la distance DP ; en donner une valeur arrondie à 10^{-1}.

EXERCICE 3 (5 points)

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = x^2 - 6x + 4\ln x$.
On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1) a) Déterminer soigneusement $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Interpréter graphiquement ce résultat.
   b) Déterminer soigneusement $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.
2) a) Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x appartenant à $]0\,;+\infty[$.
   b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\ +\infty[$. En déduire le tableau de variations de f.
3) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle [4 ; 5].

4) On admet que, pour tout x de $]0\,;+\infty[$, on a : $f''(x) = \dfrac{2x^2 - 4}{x^2}$.

Étudier la convexité de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.

On précisera les valeurs exactes des coordonnées des éventuels points d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.

Exercice 4 (5 points)

Au basket, il existe deux sortes de tir :

- les tirs à deux points.
  Ils sont réalisés près du panier et rapportent deux points s'ils sont réussis.
- les tirs à trois points.
  Ils sont réalisés loin du panier et rapportent trois points s'ils sont réussis.

Stéphanie s'entraîne au tir. On dispose des données suivantes :

- Un quart de ses tirs sont des tirs à deux points. Parmi eux, 60 % sont réussis.
- Parmi les tir à trois points, 35 % sont réussis.

1) Stéphanie réalise un tir.
   On considère les évènements suivants :

   D : « Le tir est à deux points » et R : « le tir est réussi ».

   a) Représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
   b) Calculer la probabilité $p\left(\overline{\mathrm{D}} \cap \mathrm{R}\right)$.
   c) Démontrer que la probabilité que Stéphanie réussisse un tir est égale à $0,4125$.
   d) Stéphanie réussit un tir. Calculer la probabilité qu'il s'agisse d'un tir à trois points. Arrondir le résultat au centième.

2) Stéphanie réalise à présent une série de 10 tirs à trois points.
   On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de tirs réussis.
   On considère que les tirs sont indépendants. On rappelle que la probabilité que Stéphanie réussisse un tir à trois points est égale à $0,35$.

   a) Justifier que X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.
   b) Calculer l'espérance de X. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
   c) Déterminer la probabilité que Stéphanie rate 4 tirs ou plus. Arrondir le résultat au millième.
   d) Déterminer la probabilité que Stéphanie rate au plus 4 tirs. Arrondir le résultat au millième.

3) Soit n un entier naturel non nul.
   Stéphanie souhaite réaliser une série de n tirs à trois points.
   On considère que les tirs sont indépendants. On rappelle que la probabilité qu'elle réussisse un tir à trois points est égale à $0,35$.
   Déterminer la valeur minimale de n pour que la probabilité que Stéphanie réussisse au moins un tir parmi les n tirs soit supérieure ou égale à $0,99$.