Devoir de mathématiques

À rendre le lundi 8 janvier 2023

Exercice 1

Questions diverses sur les fonctions **(10 points)**

1) Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{a}{b + \mathrm{e}^{-x}}$.

   Déterminer a et b pour que $f(0) = 2$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$.

2) Donner, en vous justifiant, l'ensemble de définition des fonctions f et g définies par :

   a) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{2x+4}\right)$ b) $g(x) = \ln(\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^{x} - 8)$

3) Déterminer la convexité dans $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par : $f(x) = 10(x-1)\mathrm{e}^{-0,5x}$.

4) Soit une fonction f continue et strictement croissante sur un intervalle $[a, b]$ qui s'annule en un réel α. Déterminer le programme en langage python qui permet de donner une valeur approchée de α à 0,001 près.

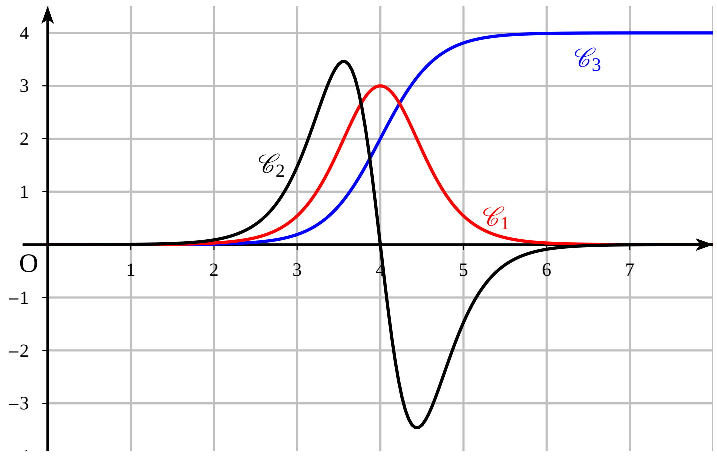
   On donnera la ou les raisons pour lesquelles les autres programmes ne fonctionnent pas :

```
programme a)
def racine(a,b):
  while abs(b-a)>=0.001:
    m=(a+b)/2
    if f(m)<0:
      b=m
    else:
      a=m
  return m
```

```
programme b)
def racine(a,b):
  m=(a+b)/2
  while abs(b-a)>=0.001:
    if f(m)<0:
      a=m
    else:
      a=m
  return m
```

```
programme c)
def racine(a,b):
  while abs(b-a)>=0.001:
    m=(a+b)/2
    if f(m)<0:
      a=m
    else:
      b=m
  return m
```

5) Soit une fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On a représenté les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ représentant les fonctions f, f' et f''.



   a) Donner, en justifiant votre choix, les courbes qui correspondent à f, f' et f''.

   b) Déterminer, avec la précision du graphique, le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_3$ pour $x = 4$.

   c) Donner, avec la précision du graphique, l'abscisse des points d'inflexion de $\mathscr{C}_2$.

Exercice 2

Fonction ln **(10 points)**

Partie A : Fonction auxiliaire *g*

Soit la fonction g définie sur $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$ par : $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$

1) Calculer les limites en 0 et en $+\infty$ de la fonction g.
2) Calculer la fonction dérivée g' sur I.
3) Étudier le signe de $g'(x)$ sur I puis dresser le tableau de variation de la fonction g sur I.
4) a) Démontrer que $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur I puis que $\alpha \in [1\,;\,\mathrm{e}]$.
   b) Donner un encadrement de α à 10^{-3} à l'aide de l'algorithme de dichotomie.
   On donnera le nombre d'itérations nécessaires.
5) En déduire le tableau de signe de g sur I.

Partie B : Étude de la fonction principale

Soit la fonction f définie sur I par : $f(x) = \dfrac{\ln x}{1 + x^2}$.

1) Démontrer que pour $x \in \mathrm{I}$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x(1 + x^2)^2}$.
2) Démontrer que la fonction f admet un maximum en α (de la partie A).
3) Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{1}{2\alpha^2}$.
4) On note T_1 et T_α les tangentes à $\mathscr{C}_f$ aux points $x = 1$ et $x = \alpha$.
   Déterminer, en fonction de α, les coordonnées du point d'intersection de T_1 et T_α.