Correction du devoir

Du lundi 8 janvier 2023

Exercice 1

Questions diverses sur les fonctions **(10 points)**

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, par somme et quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{a}{b}$.

On a le système suivant :

$$\begin{cases} f(0) = 2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{b+1} = 2 \\ \dfrac{a}{b} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b+2 \\ a = 3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = 6 \end{cases} \text{ d'où } f(x) = \frac{6}{2+\mathrm{e}^{-x}}$$

2) a)

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$\dfrac{x-1}{2x+4}$		$+$	||	$-$	0	$+$	

$D_f =]-\infty\,;\,-2[\cup]1\,;\,+\infty[$

b) $\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^{x} - 8 > 0$, on pose $X = \mathrm{e}^{x}$ avec $X > 0$, l'inéquation devient :

$X^2 + 2X - 8 > 0$ racine évidente $X_1 = 2 \overset{P=-8}{\Rightarrow} X_2 = -4 < 0$ (non retenu).

X	0		2		$+\infty$
X^2+2X-8	||	$-$	0	$+$	

$\overset{\ln\nearrow}{\Leftrightarrow}$

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^{x}-8$		$-$	0	$+$	

$D_g =]\ln 2\,;\,+\infty[$

3) On dérive deux fois la fonction f :

$f'(x) = 10\,\mathrm{e}^{-0,5x} - 5(x-1)\,\mathrm{e}^{-0,5x} = (-5x+15)\,\mathrm{e}^{-0,5x} = 5(-x+3)\,\mathrm{e}^{-0,5x}$

$f''(x) = -5\,\mathrm{e}^{-0,5x} - 2,5(-x+3)\,\mathrm{e}^{-0,5x} = (2,5x - 12,5)\,\mathrm{e}^{-0,5x} = 2,5(x-5)\,\mathrm{e}^{-0,5x}$

f'' est du signe de $(x-5)$

x	$-\infty$		5		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f		concave	0	convexe	

4) Le programme qui donne une valeur approchée de α est le **programme c)**

Ce programme utilise l'algorithme de dichotomie. On détermine le milieu m de l'intervalle $[a, b]$ et comme la fonction est croissante si $f(m) < 0$, on remplace a par m car $f(m) < 0$ et $f(b) > 0$ sinon on remplace b par m.

On réitère le processus jusqu'à la précision de 0,001.

- Le programme a) remplace b par m lorsque $f(m) < 0$. Il n'effectuera qu'une boucle.
- Le programme b) calcule le milieu m de l'intervalle avant la boucle. Il n'effectuera qu'une boucle.

5) a) La courbe qui représente la fonction f est **la courbe $\mathscr{C}_3$** qui est monotone change une fois de concavité. La courbe $\mathscr{C}_1$ représente alors la dérivée f' (ne change pas de signe) et la courbe $\mathscr{C}_2$ représente la dérivée seconde f'' (change une fois de signe) .

- Si la courbe $\mathscr{C}_1$ représentait la fonction f (change trois fois de concavité) une deux autres courbe devrait couper deux fois l'axe des abscisses.
- Si la courbe $\mathscr{C}_2$ représentait la fonction f (change trois fois de variation) une deux autres courbe devrait couper deux l'axe des abscisses.

b) Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_3$ en 4 est 3 car sur $\mathscr{C}_1$ on a $f'(4) = 3$.

c) $\mathscr{C}_2$ possède trois points d'inflexion en 3, 4 et 5. (plus précisément 3,23 ; 4 et 4,76)

Exercice 2

Fonction ln **(10 points)**

Partie A : Fonction auxiliaire g

1) Limite en 0^+ : $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} 1+x^2=1\\ \lim\limits_{x\to 0^+} x^2\ln x=0\end{array}\right\}$ Par somme et produit $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=1$

Limite en $+\infty$: $g(x)=x^2\left(\dfrac{1}{x^2}+1-2\ln x\right)$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} -2\ln x=-\infty \overset{\text{somme}}{\Rightarrow} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}+1-\ln x=-\infty\end{array}\right\}$ Par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

2) $g'(x)=2x-4x\ln x-2x^2\times\dfrac{1}{x}=2x-4x\ln x-2x=-4x\ln x$.

3) $x>0$ donc $g'(x)=0 \Leftrightarrow \ln x=0 \Leftrightarrow x=1$ et signe $g'(x)=$ signe $(-\ln x)$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	‖ 1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

4) a) • Sur $]0\,;\,1[$, la fonction g est croissante de minimum 1 donc ne peut s'annuler.

• Sur $[1\,;\,+\infty[$, la fonction g est continue (car dérivable), strictement décroissante et change de signe car $g(1)=2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$, d'après le TVI, l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α.

$g(x)=0$ admet une unique solution α sur I, et $g(\mathrm{e})=2-\mathrm{e}<0$ donc $\alpha\in[1\,;\,\mathrm{e}]$.

b) L'algorithme de dichotomie donne $1,894\leqslant\alpha\leqslant 1,895$ au bout de 11 itérations.

5)

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	

Partie B : Étude de la fonction principale

1) $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}(1+x^2)-2x\ln x}{(1+x^2)^2}=\dfrac{1+x^2-2x^2\ln x}{x(1+x^2)^2}=\dfrac{g(x)}{x(1+x^2)^2}$

2) $x>0$ donc signe $f'(x)=$ signe de $g(x)$ donc d'après la partie A, on a :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	

La fonction f admet donc un maximum en α.

3) $g(\alpha)=0 \Leftrightarrow 1+\alpha^2-2\alpha^2\ln\alpha=0 \Leftrightarrow \ln\alpha=\dfrac{1+\alpha^2}{2\alpha^2}$. $\quad f(\alpha)=\dfrac{\ln\alpha}{1+\alpha^2}=\dfrac{\frac{\cancel{1+\alpha^2}}{2\alpha^2}}{\cancel{1+\alpha^2}}=\dfrac{1}{2\alpha^2}$.

4) T_1 : $y=f'(1)(x-1)+f(1) \Leftrightarrow y=\dfrac{1}{2}(x-1)$ et T_α : $y=f(\alpha) \Leftrightarrow y=\dfrac{1}{2\alpha^2}$

Soit J le point d'intersection de T_1 et T_α : $\dfrac{1}{2}(x_\mathrm{J}-1)=\dfrac{1}{2\alpha^2} \Leftrightarrow x_\mathrm{J}=\dfrac{1}{\alpha^2}+1$.

Donc $\mathrm{J}\left(\dfrac{1}{\alpha^2}+1\,;\,\dfrac{1}{2\alpha^2}\right)$