Correction contrôle de mathématiques

Du lundi 29 janvier 2024

EXERCICE 1

QCM **(5 points)**

1) **Réponse a)** : $p(\mathrm{G}) = \dfrac{300}{180} = \dfrac{3}{5}$

2) **Réponse a)** : $p(\mathrm{G} \cap \mathrm{A}) = p(\mathrm{G}) \times p_{\mathrm{G}}(\mathrm{A}) = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{20}$.

3) **Réponse a) et c)** : $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{G}) = \dfrac{p(\mathrm{G} \cap \mathrm{A})}{p(\mathrm{A})} = \dfrac{3}{20} \times \dfrac{300}{180 \times 0,25 + 120 \times 0,2} = \dfrac{3}{20} \times \dfrac{300}{69} = \dfrac{15}{23}$

$p_{\mathrm{B}}(\mathrm{F}) = \dfrac{p(\mathrm{B} \cap \mathrm{F})}{p(\mathrm{B})} = \dfrac{120 \times 0,8}{p(\overline{\mathrm{A}})} = \dfrac{96}{231} = \dfrac{32}{77}$ et $p_{\mathrm{G}}(\mathrm{A}) = \dfrac{1}{4}$, $p_{\mathrm{F}}(\mathrm{B}) = 0,8 = \dfrac{4}{5}$.

4) **Réponse b)** : $p(X > 2) = 1 - p(X \leqslant 2) = 1 - \text{binomFRép}(50, 0.082, 2) \approx 0,789$.

5) **Réponse c)** : $p(X = 0) > 0,4 \iff (1 - 0,082)^n > 0,4 \iff 0,918^n > 0,4 \iff$

$n < \dfrac{\ln(0,4)}{\ln(0,918} \approx 10,7 \iff n \leqslant 10$.

EXERCICE 2

Divers **(5 points)**

1) a) Par complément à 1, on a $p(X = 1) = 0,425$.

b) $\mathrm{E}(X) = \displaystyle\sum_{i=0}^{3} p(X = x_i)x_i = 1,448$,

$\mathrm{V}(X) = \displaystyle\sum_{i=0}^{3} p(X = x_i)x_i^2 - \mathrm{E}^2(X) \approx 0,593$ et $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \approx \sqrt{0,593} \approx 0,770$

2) a) Soit l'expérience « on interroge au hasard un habitant » et on appelle succès cet habitant est allergique de probabilité $p = 0,08$.

On réitère 150 fois cette expérience de façon identique (assimilable à un tirage avec remise) et indépendante et on appelle Y la v.a. associée au nombre de succès.

Y suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}(150 ; 0,08)$.

b) $p(Y = 20) = \dbinom{150}{20} \times 0,08^{20} \times 0,92^{130} = \text{binomFdp}(150, 0.08, 20) \approx 0,008$.

c) $p(Y \geqslant 15) = 1 - p(Y \leqslant 14) = 1 - \text{binomFrép}(150, 0.08, 14) \approx 0,220$

EXERCICE 3

Accouchements **(10 points)**

1) a) $p(\text{jumeaux}) = \dfrac{293\,898}{18\,221\,965} \approx 0,016$.

1,6 % d'accouchements ont donné naissance à des jumeaux entre 1998 et 2020.

b) $p(3 \text{ ou plus}) = \dfrac{4\,921}{18\,221\,965} \approx 2,7 \times 10^{-4} < 10^{-3}$.

Moins de 0,1 % d'accouchements ont donné naissance à 3 ou plus enfants.

2) a) Soit l'expérience « on choisit au hasard un accouchement réalisé un jour donné » et on appelle succès cet accouchement est double de probabilité $p = 0,016$.

On réitère 20 fois cette expérience de façon identique (assimilable à un tirage avec remise) et indépendante et l'on appelle X la v.a. associée au nombre de succès.

X suit alors la loi binomiale $\mathscr{B}(20\,;\ 0,016)$.

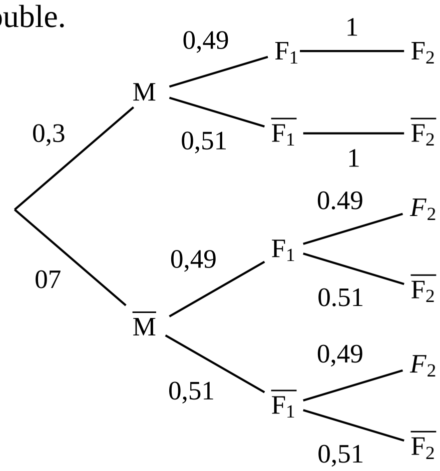
$p(X=1) = \dbinom{20}{1} \times 0,016 \times 0,984^{19} \approx 0,236.$

b) $p(X \geqslant 1) \geqslant 0,99 \;\Leftrightarrow\; 1 - p(X=0) \geqslant 0,99 \;\Leftrightarrow\; 1 - 0,984^n \geqslant 0,99 \;\Leftrightarrow$

$0,984^n \leqslant 0,01 \;\overset{\ln\nearrow}{\Leftrightarrow}\; n\,\underbrace{\ln 0,984}_{<0} \leqslant \ln 0,01 \;\Leftrightarrow\; n \geqslant \dfrac{\ln 0,01}{0,984} \approx 285,5$

Il faut au moins 286 accouchements pour que l'on soit sûr à 99 % qu'il y ait au moins un accouchement double.

3) a) On obtient l'arbre suivant :



b) D'après l'arbre pondéré, on a :

$$\begin{aligned} p(\mathrm{F_1} \cap \mathrm{F_2}) &= p(\mathrm{M} \cap \mathrm{F_1} \cap \mathrm{F_2}) + p(\overline{\mathrm{M}} \cap \mathrm{F_1} \cap \mathrm{F_2}) \\ &= p(\mathrm{M}) \times p_{\mathrm{M}}(\mathrm{F_1} \cap \mathrm{F_2}) + p(\overline{\mathrm{M}}) \times p_{\overline{\mathrm{M}}}(\mathrm{F_1} \cap \mathrm{F_2}) \\ &= 0,3 \times 0,49 \times 1 + 0,7 \times 0,49^2 = 0,315\,07 \end{aligned}$$

c) $p_{\mathrm{F_1} \cap \mathrm{F_2}}(\mathrm{M}) = \dfrac{p(\mathrm{M} \cap \mathrm{F_1} \cap \mathrm{F_2})}{p(\mathrm{F_1} \cap \mathrm{F_2})} = \dfrac{0,3 \times 0,49}{0,315\,05} \approx 0,467$