

BACCALAURÉAT BLANC

DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 HEURES
Les calculatrices sont **AUTORISÉES** en mode examen actif

Coefficient : **16**

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- ▶ le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.

EXERCICE 1**(5 points)**

- 1) **Réponse c)** : $p(A \cap G) = p(A) \times p_A(G) = \frac{2}{5} \times \frac{7}{10} = \frac{7}{25}$
- 2) **Réponse b)** : $p(G) = p(A \cap G) + p(B \cap G) = p(A \cap G) + (1 - p(A)) \times p_B(G) \Rightarrow$

$$p_B(G) = \frac{p(G) - p(A \cap G)}{1 - p(A)} = \frac{\frac{12}{25} - \frac{7}{25}}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{1}{3}$$
- 3) **Réponse c)** : Soit X la v.a. associée au nombre de parties gagnées.
 X suit alors la loi binomiale $\mathcal{B}\left(10; \frac{12}{25} = 0,48\right)$.

$$p(X = 6) = \binom{10}{6} \left(\frac{12}{25}\right)^6 \left(\frac{13}{25}\right)^4 = \text{binomFdp}(10, 0,48, 6) \approx 0,1878 \approx 0,188 \text{ au millième près.}$$
- 4) **Réponse b)** : On doit résoudre $p(X \leq n) = 0,207$.
 En testant les valeurs données, on trouve $n = 3$, $\text{binomFRép}(10, 0,48, 3) \approx 0,2067$
- 5) **Réponse d)** : $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \left(\frac{13}{25}\right)^{10}$.

EXERCICE 2**(5 points)**

- 1) a) D'après la représentation paramétrique, $\vec{v}(2; 1; 0)$ est un vecteur directeur de la droite d_2 .
- b) Les coordonnées de $\vec{u}(1; -1; 1)$ et $\vec{v}(2; 1; 0)$ ne sont pas proportionnelles car $\frac{1}{2} \neq \frac{-1}{1}$ donc les vecteurs \vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires. Les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.
- c) Une représentation paramétrique de la droite d_1 est :
$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$
- Les droites d_1 et d_2 sont sécantes si le système suivant admet une solution
- $$\begin{cases} 2 + t = 2k - 3 & (1) \\ 3 - t = k & (2) \\ t = 5 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3) t = 5 \\ (2) k = 3 - 5 = -2 \\ (1) 2 + 5 \neq 2(-2) - 3 \text{ non vérifiée} \end{cases}$$
- Le système n'est pas vérifié donc les droites d_1 et d_2 ne sont pas sécantes.
- d) Les droites d_1 et d_2 ne sont ni parallèles, ni sécantes, elles sont alors non coplanaires.
- 2) a) $\vec{w} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 - 2 + 3 = 0 \Rightarrow \vec{w} \perp \vec{u}$
- $$\vec{w} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 + 2 + 0 = 0 \Rightarrow \vec{w} \perp \vec{v}$$
- b) On remplace les équations de la droite d_2 dans l'équation du plan. On obtient alors :
 $5(2k - 3) + 4k - 5 - 22 = 0 \Leftrightarrow 10k - 15 + 4k - 27 = 0 \Leftrightarrow 14k = 42 \Leftrightarrow k = 3$
 Le point M est alors déterminé en remplaçant $k = 3$ dans les équations de d_2 , on obtient alors $M(3; 3; 5)$.
- 3) a) La droite Δ est orthogonale à d_1 car $\vec{w} \perp \vec{u}$.

On détermine le point éventuel d'intersection L en résolvant le système suivant :

$$\begin{cases} -r + 3 = 2 + t & (1) \\ 2r + 2 = 3 - t & (2) \\ 3r + 5 = t & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \times (1) + (2) & 9 = 7 + t \Leftrightarrow t = 2 \\ (1) & r = 1 - t = -1 \\ (3) & 3(-1) + 5 = 2 = t \text{ vérifié} \end{cases}$$

Les droites Δ et d_1 sont perpendiculaire en un point L dont on détermine les coordonnées en remplaçant $r = -1$ dans les équations de Δ , on trouve $L(4; 1; 2)$

- b) On vient de montrer que Δ est perpendiculaire à d_1 et de plus la droite Δ est perpendiculaire à d_2 en M car $\vec{w} \perp \vec{v}$ et $M \in \Delta \cap d_2$. La droite Δ est bien la droite cherchée.

EXERCICE 3**(5 points)****Partie A**

$$1) g'(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x} = \frac{-2x + 2 + x^2}{x^3} = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^3}$$

Comme $x > 0$, le signe de $g'(x)$ est celui de $(x^2 - 2x + 2)$.

$$2) g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 \stackrel{\Delta=4-8=-4<0}{\Leftrightarrow} \text{pas de solution.}$$

g' a un signe constant, celui du coefficient devant x^2 donc $\forall x \in I, g'(x) > 0$.

La fonction g est strictement croissante sur I.

$$3) g(0,5) = 4 - 4 + \ln(0,5) = -\ln 2 < 0 \text{ et } g(1) = 2 - 1 + 0 = 1 > 0$$

Sur $[0,5; 1]$, la fonction g est continue car dérivable, strictement monotone (croissante) et change de signe car $g(0,5) \times g(1) < 0$, d'après le TVI, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α .

4) On a alors le tableau de signe suivant :

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$		-	+

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle I par : $f(x) = e^x \ln x$.

On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

$$1) f''(x) = e^x \left(\frac{1}{x} + \ln x \right) + e^x \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \right) = e^x \left(\frac{1}{x} + \ln x - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \right) = e^x \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \ln x \right) = e^x g(x).$$

$$2) a) \text{ Signe } f''(x) = \text{signe } g(x) \text{ car } \forall x \in I, e^x > 0.$$

x	0	α	$+\infty$
$f''(x)$		-	+

b) Sur I la fonction f'' ne s'annule qu'une fois en changeant de signe donc \mathcal{C}_f admet un unique point d'inflexion A d'abscisse α .

c) • Sur $]0; \alpha[$, $f''(x) < 0$ donc la fonction f est concave.

• Sur $]\alpha; +\infty[$, $f''(x) > 0$ donc la fonction f est convexe.

$$3) a) \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Par produit} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Par produit} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$b) g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} + \ln \alpha \Leftrightarrow \ln \alpha = -\frac{2}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \quad (1)$$

$$f'(\alpha) = e^\alpha \ln \alpha \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} f'(\alpha) = e^\alpha \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{2}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \right) = e^\alpha \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} \right) = \frac{e^\alpha}{\alpha^2} (1 - \alpha)$$

$$c) 0,5 < \alpha < 1 \stackrel{\times(-1)}{\Leftrightarrow} -1 < -\alpha < 0 \stackrel{+1}{\Leftrightarrow} 0 < 1 - \alpha < 1 \stackrel{\times \frac{e^\alpha}{\alpha^2} > 0}{\Leftrightarrow} 0 < \frac{e^\alpha}{\alpha^2} (1 - \alpha) < \frac{e^\alpha}{\alpha^2}$$

donc $f'(\alpha) > 0$, d'après le tableau de signe de f'' , on a :

x	0	α	$+\infty$
$f''(x)$		-	+
$f'(x)$		↘ $f'(\alpha) > 0$ ↗	

Donc $\forall x \in I, f'(x) > 0$.

d) On obtient alors le tableau de variation de f

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

EXERCICE 4

(5 points)

1) $u_1 = 5u_0 - 8 \times 0 + 6 = 6$ et $u_2 = 5u_1 - 8 \times 1 + 6 = 28$.

2) On obtient le programme suivant .

```
def u(n) :
    u=0
    for i in range(1, n+1) :
        u=5*u-8*(i-1)+6
    return u
```

3) a) **Initialisation** : $n = 0$, $u_0 = 0 \geq 2 \times 0$, la proposition est initialisée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n \geq 2n$, montrons que $u_{n+1} \geq 2(n+1)$

$$(HR) \quad u_n \geq 2n \stackrel{\times 5}{\Rightarrow} 5u_n \geq 10n \stackrel{-8n+6}{\Rightarrow} 5u_n - 8n + 6 \geq 10n - 8n + 6 \Rightarrow u_{n+1} \geq 2n + 6 \geq 2(n+1)$$

La proposition est héréditaire.

Par initialisation et hérédité : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 2n$.

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n = +\infty$, d'après le théorème de comparaison $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

c) Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, il existe un rang n_0 tel que tous les termes u_n avec $n \geq n_0$ sont supérieurs à 10^p .

4) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 5u_n - 8n + 6 - u_n = 4u_n - 8n + 6$.

$$\text{D'après 3a), } u_n \geq 2n \stackrel{\times 4}{\Rightarrow} 4u_n \geq 8n \stackrel{-8n+6}{\Rightarrow} 4u_n - 8n + 6 \geq 8n - 8n + 6 \Rightarrow u_{n+1} - u_n \geq 6 > 0.$$

La suite (u_n) est croissante.

5) a) D'après la liste de $v(5)$, on obtient le terme suivant en multipliant par 5 donc $v_{n+1} = 5v_n$.
Démontrons cette conjecture :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2(n+1) + 1 = 5u_n - 8n + 6 - 2n - 2 + 1 = 5u_n - 10n + 5 = 5(u_n - 2n + 1) = 5v_n.$$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{v_{n+1}}{v_n} = 5$, donc la suite v_n est géométrique de raison $q = 5$ et de premier terme $v_0 = u_0 + 1 = 1$.

$$\text{On a alors } v_n = v_0 q^n = 5^n \text{ or } v_n = u_n - 2n + 1 \Rightarrow u_n = v_n + 2n - 1 = 5^n + 2n - 1.$$