Contrôle de mathématiques

Mercredi 27 novembre 2024

EXERCICE 1

Vrai-Faux **(5 points)**

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée. *Une réponse non justifiées ne rapporte aucun points.*

1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \mathrm{e}^x + x$.

   Proposition 1 : La fonction f a pour tableau de variations le tableau suivant :

   (on justifiera la monotonie et les limites)

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

   Proposition 2 : L'équation $f(x) = -2$ admet deux solutions.

2) **Proposition 3 :** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x - x^2 + 2}{3x^2} = -\frac{1}{3}$.

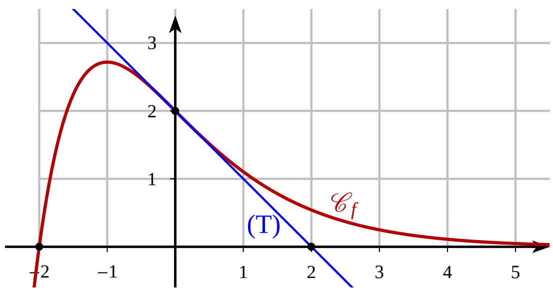
3) Soit la fonction f telle que $f(3) = 1$ et $f'(3) = 5$.
   Soit (T) la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 3.
   Proposition 4 : Une équation de la tangente (T) est : $y = 3x - 16$

4) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$ de courbe $\mathscr{C}_f$.
   Proposition 5 : $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse $x = 2$.

EXERCICE 2

Représentation graphique **(2 points)**

Dans un repère, on a tracé la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et la tangente (T) au point d'abscisse 0.



À l'aide du graphique, répondre aux questions suivantes :

1) Donner les valeurs de $f(0)$ et $f'(0)$.
2) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
3) Déterminer suivant les valeurs de x la convexité de la fonction f.
4) La fonction f admet-elle un point d'inflexion ? À quoi le reconnaît-on ?

Exercice 3

Limites **(3 points)**

1) Déterminer : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3-5e^x}{1+2e^x}$

2) Soit la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = (x+1)\,e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

   a) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la fonction f ?

   b) On a $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = 0$. Que peut-on en déduire pour la fonction f et la courbe $\mathscr{C}_f$?

Exercice 4

Fonction **(10 points)**

On considère la fonction f définie sur $]-\infty\,;\,1[$ par : $f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$.

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.
On appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1) a) Déterminer la limite de la fonction f en 1^-.

   b) En déduire une interprétation graphique.

2) Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

3) a) Déterminer la fonction dérivée f' sur $]-\infty\,;\,1[$.

   b) Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur $]-\infty\,;\,1[$.

4) On admet que pour tout réel x de $]-\infty\,;\,1[$, on a : $f''(x) = \dfrac{(x^2-4x+5)e^x}{(x-1)^3}$.

   a) Étudier la convexité de la fonction f sur $]-\infty\,;\,1[$.

   b) Déterminer l'équation de la tangente (T_0) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

   c) En déduire que, pour tout réel x de $]-\infty\,;\,1[$, on a : $e^x \geqslant (-2x-1)(x-1)$.

5) a) Justifier que l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α sur $]-\infty\,;\,1[$.

   b) À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.