Contrôle de mathématiques

Mercredi 18 décembre 2024

Exercice 1

QCM **(5 points)**

Pour chacune des cinq questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) Soit a et b deux réels et la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(t) = \dfrac{a}{b + \mathrm{e}^{-t}}$.
   On sait que $f(0) = 2$ et $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} f(t) = 3$. Les valeurs de a et b sont :

   a) $a = 2$ et $b = 3$ b) $a = 4$ et $b = \dfrac{4}{3}$ c) $a = 4$ et $b = 1$ d) $a = 6$ et $b = 2$

2) Soit la fonction g définie par : $g(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{2x+4}\right)$. La fonction g est définie sur :

   a) $\mathbb{R}$
   b) $]-2\,;\,1[$
   c) $]-2\,;+\infty[$
   d) $]-\infty\,;-2[\cup]1\,;+\infty[$

3) Soit la fonction h dérivable sur $]0\,;+\infty[$ par : $h(x) = x\ln x - x + 1$.
   La fonction dérivée h' a pour expression :

   a) $\ln x$ b) $\dfrac{1}{x} - 1$ c) $\ln x - 2$ d) $\ln x - 1$

4) Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x^2(1 - \ln x)$.
   Parmi les quatre propositions suivantes, laquelle est correcte ?

   a) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$
   b) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$
   c) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$
   d) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f(x)$ n'existe pas.

5) L'ensemble des solutions S de l'inéquation $\ln(x+3) < 2\ln(x+1)$ est :

   a) $S =]-\infty\,;-2[\cup]1\,;+\infty[$
   b) $S =]1\,;+\infty[$
   c) $S =]-2\,;\,1[$
   d) $S = \varnothing$

Exercice 2

Fonction ln **(7 points)**

Soit la fonction f définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x^2 - 8\ln x$.

1) Déterminer la limite $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f(x)$.
2) Déterminer la limite $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
3) Déterminer l'expression de la fonction dérivée f' que l'on factorisera.
4) Montrer que la fonction dérivée f' est du signe de $(x-2)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$.
   On précisera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} du minimum de f.

5) Démontrer que, sur $]0\,;2]$, l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α.
6) Montrer que $\alpha \in [1\,;\,2]$ puis à l'aide du programme de dichotomie donner une valeur approchée de α à 10^{-3} ainsi que le nombre d'itérations nécessaires.
7) Pour tout $k \in \mathbb{R}$, on définit la fonction g_k sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $g_k(x) = x^2 - 8\ln x + k$.
   En s'aidant du tableau de variations de f, déterminer la plus petite valeur de k pour laquelle la fonction g_k est positive ou nulle sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$. Justifier.

EXERCICE 3

Fonction ln bis **(4 points)**

Soit la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \ln(x^2+1)$.

1) Déterminer la fonction dérivée f' sur $\mathbb{R}$ que l'on factorisera.
2) En déduire que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.
3) Montrer que pour tout $x > 0$, on peut écrire la fonction f sous la forme :

$$f(x) = x - 2\ln x - \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

4) En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$ que l'on justifiera soigneusement.

EXERCICE 4

Équations et inéquations **(4 points)**

1) Résoudre l'équation suivante : $\ln x + \ln(x-1) = \ln 6$
2) Déterminer algébriquement le plus petit entier naturel n tel que $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n > 0,95$.