Contrôle de mathématiques

Mercredi 19 mars 2025

Exercice 1

QCM **(5 points)**

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, dites si elle est vraie ou fausse en vous justifiant. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+4x+5}$.

   Affirmation 1 : « La primitive F de f qui s'annule en -1 est : $F(x) = \ln\left(\dfrac{1}{2}x^2 + 2x + \dfrac{5}{2}\right)$ ».

2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{6}{1+5\,\mathrm{e}^{-x}}$.

   Affirmation 2 : « La fonction $F(x) = 6\ln(\mathrm{e}^x + 5)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ ».

3) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 + 2\mathrm{e}^{-x^2+1}$

   Affirmation 3 : « Il existe une primitive de la fonction f décroissante sur $\mathbb{R}$ ».

4) Soit l'équation différentielle (E) : $3y' + y = 1$

   Affirmation 4 : « La solution g de (E) telle que $g(0) = 5$ est $g(x) = 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + 1$ ».

5) Soit l'équation différentielle (E) : $y' + \dfrac{1}{4}y = 20\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$

   Affirmation 5 : « La fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 20x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$ est solution de l'équation (E) ».

Exercice 2

Primitives **(4 points)**

1) Soit la fonction f définie sur $]2\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{3x^2-5x+2}{x-2}$

   a) Déterminer les réels a, b et c tels que : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-2}$

   b) En déduire une primitive de la fonction f sur $]2\,;+\infty[$.

2) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (4x+2)\,\mathrm{e}^{-x+1}$

   a) Déterminer les réels a et b pour que la fonction h telle que $h(x) = (ax+b)\,\mathrm{e}^{-x+1}$ soit une primitive de la fonction g.

   b) Déterminer la primitive G de g telle que $G(0) = 0$.

EXERCICE 3

Équation différentielle **(6 points)**

On considère l'équation différentielle : (E_0) : $y' = y$
où y est une fonction dérivable de la variable réelle x.

1) Démontrer que l'unique fonction constante solution de l'équation différentielle (E_0) est la fonction nulle.
2) Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E_0).

On considère l'équation différentielle : (E) : $y' = y - \cos x - 3\sin x$
où y est une fonction dérivable de la variable réelle x.

3) Démontrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2\cos x + \sin x$ est solution de l'équation différentielle (E).
4) On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Démontrer l'équivalence : « f solution de (E) $\Leftrightarrow$ $(f - h)$ solution de E_0 ».
5) En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).
6) Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 0$.

EXERCICE 4

Taux de chlore d'une piscine **(5 points)**

Paul possède une piscine. Pour désinfecter l'eau, il doit ajouter du chlore.

Le taux de chlore dans l'eau, exprimé en $\mathrm{mg} \cdot \ell^{-1}$, est défini comme la masse de chlore par unité de volume d'eau. On préconise un taux de chlore compris entre 1 et 3 $\mathrm{mg} \cdot \ell^{-1}$.

Sous l'action du milieu ambiant, le chlore se décompose et disparaît peu à peu.

Paul décide de faire appel à un bureau d'études spécialisées qui utilise un modèle continu pour décrire le taux de chlore dans la piscine. Dans ce modèle, pour une durée x (en jours écoulés à compter du mercredi 19 juin), $f(x)$ représente le taux de chlore, en $\mathrm{mg} \cdot \ell^{-1}$, dans la piscine.

On admet que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) : $y' = -0,08y + \dfrac{q}{50}$,
où q est la quantité de chlore, en gramme, rajoutée dans la piscine chaque jour.

1) Déterminer les solutions $y(x)$ de l'équation (E) en fonction de q.
2) a) Exprimer en fonction de q la limite des fonctions y en $+\infty$.
   b) Le taux de chlore observé le mercredi 19 juin est égal à $0,7\ \mathrm{mg} \cdot \ell^{-1}$ et on souhaite que le taux de chlore se stabilise à long terme autour de $2\ \mathrm{mg} \cdot \ell^{-1}$.

      Déterminer la fonction f solution de (E) satisfaisant ces deux critères.
3) Quel est le nombre de jours nécessaires pour que le taux de chlore devienne supérieur à $1\ \mathrm{mg} \cdot \ell^{-1}$?