Contrôle de mathématiques

Mercredi 9 avril 2025

Exercice 1

Calculs d'intégrales **(3 points)**

Calculer les intégrales suivantes :

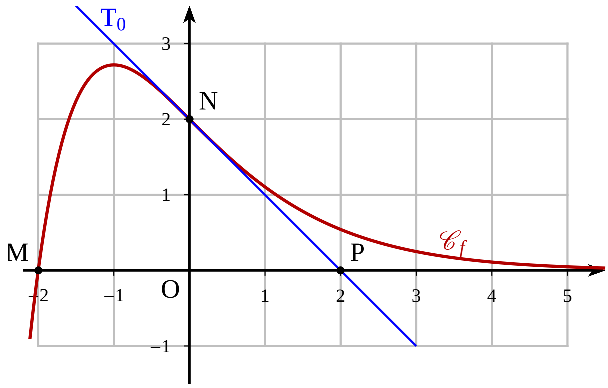
1) $I = \displaystyle\int_0^{50} \left(\mathrm{e}^{-0,02t} + 30\right) \mathrm{d}t.$ 2) $I = \displaystyle\int_0^{\ln 3} \dfrac{2\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} \, \mathrm{d}x.$

Exercice 2

Surface non limitée d'aire finie **(4 points)**

Partie A

Soit une fonction de la forme $f(x) = (ax+b)\,\mathrm{e}^{\lambda x}$ avec $a, b, \lambda \in \mathbb{R}$
On donne la représentation $\mathscr{C}_f$ de f qui passe par les points $\mathrm{M}(-2\,;\,0)$ et $\mathrm{N}(0\,;\,2)$ et dont la tangente T_0 en 0 passe par le point $\mathrm{P}(2\,;\,0)$.



1) À l'aide de ces renseignements, justifier que : $f(x) = (x+2)\,\mathrm{e}^{-x}$.

2) Pour tout nombre réel $t \geqslant 0$, on pose : $I(t) = \displaystyle\int_{-2}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x.$

   a) En utilisant une intégration par parties, montrer que : $I(t) = (-t-3)\,\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^2$.

   b) En déduire un exemple de surface non limitée dont l'aire est finie.

Exercice 3

Aire **(6 points)**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2-4)\,\mathrm{e}^{-x}$.

1) Déterminer le signe sur $\mathbb{R}$ de la fonction f

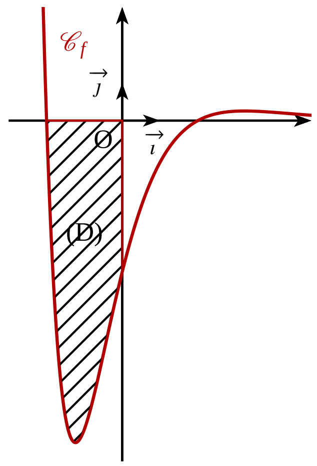
2) Soit la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $I_n = \displaystyle\int_{-2}^{0} x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$

   a) Justifier que $I_0 = \mathrm{e}^2 - 1$.

   b) Par une intégration par parties, démontrer l'égalité : $I_{n+1} = (-2)^{n+1}\,\mathrm{e}^2 + (n+1)I_n$.

c) En déduire les valeurs exactes de I_1 et de I_2.

3) On a représenté ci-contre la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Le domaine (D) du plan hachuré ci-contre est délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.
À l'aide de la question 2), calculer la valeur exacte, en unité d'aire, de l'aire S du domaine (D).



Exercice 4

Suites et intégrales **(7 points)**

Soit les suites (I_n) et (J_n) définies sur $\mathbb{N}$ par les intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx} \sin x \, \mathrm{d}x, \qquad J_n = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx} \cos x \, \mathrm{d}x.$$

1) Calculer I_0.

2) a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_n \geqslant 0$.
   b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$.
   c) Déduire des deux questions précédentes que la suite (I_n) converge.

3) a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $I_n \leqslant \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx} \, \mathrm{d}x$.
   b) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, on a : $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx} \, \mathrm{d}x = \frac{1 - \mathrm{e}^{-n\pi}}{n}$.
   c) Déduire des deux questions précédentes la limite de la suite (I_n).

4) a) En intégrant par parties l'intégrale I_n de deux façons différentes, établir les deux relations suivantes, pour tout $n \geqslant 1$:

$$I_n = 1 + \mathrm{e}^{-n\pi} - nJ_n \quad \text{et} \quad I_n = \frac{1}{n} J_n$$

   b) En déduire que, pour $n \geqslant 1$, on a : $I_n = \dfrac{1 + \mathrm{e}^{-n\pi}}{n^2 + 1}$.

5) On souhaite obtenir le rang n à partir duquel la suite (I_n) devient inférieure à 0,1.
Recopier et compléter la cinquième ligne du script avec la commande appropriée.

```
1  from math import*
2  def seuil():
3      n=0
4      I=2
5      ...
6          n=n+1
7          I=(1+exp(-n*pi))/(n**2+1)
8      return n
```

Quelle est alors la valeur retournée ?