Théorème chinois
Suite du sujet métropole juin 2011

Énoncé

"Une bande de 17 pirates possède un trésor constitué de pièces d'or d'égale valeur. Ils projettent de se les partager également, et de donner le reste au cuisinier chinois. Celui-ci recevrait alors 3 pièces. Mais les pirates se querellent, et six d'entre eux sont tués. Un nouveau partage donnerait au cuisinier 4 pièces. Dans un naufrage ultérieur, seuls le trésor, six pirates et le cuisinier sont sauvés, et le partage donnerait alors 5 pièces d'or à ce dernier. Quelle est la fortune minimale que peut espérer le cuisinier s'il décide d'empoisonner le reste des pirates ?"

Résolution

D'après l'énoncé, on a le système suivant :

$$(S)\ \begin{cases} n \equiv 3 \mod 17 \\ n \equiv 4 \mod 11 \\ n \equiv 5 \mod 6 \end{cases}$$

On résout alors le système formé par les deux premières équations suivant la méthode indiquée à l'exercice 8

$$(S_1)\ \begin{cases} n \equiv 3 \mod 17 \\ n \equiv 4 \mod 11 \end{cases}$$

On pose alors l'équation (E_1) : $17u + 11v = 1$

Le couple $(2; -3)$ est solution évidente de l'équation (E_1)

On a alors comme solution à (S_1)

$$\begin{aligned} n_0 &= 4 \times 17u + 3 \times 11v \\ &= 4 \times 17 \times 2 + 3 \times 11 \times (-3) \\ &= 136 - 99 \\ &= 37 \end{aligned}$$

La solution générale n est telle que $n - n_0$ est divisible par $17 \times 11 = 187$

On résout alors un deuxième système :

$$(S_2)\ \begin{cases} n \equiv 37 \mod 187 \\ n \equiv 5 \mod 6 \end{cases}$$

On pose alors (E_2) : $187u + 6v = 1$

A l'aide d'un programme pour rechercher une solution particulière (ou en remontant l'algorithme d'Euclide), on trouve : $(1; -31)$ comme solution.

On a alors comme solution du système (S_2)

$$\begin{aligned} n_1 &= 5 \times 187u + 37 \times 6v \\ & 5 \times 187 \times 1 + 37 \times 6 \times (-31) \\ &= -5947 \end{aligned}$$

On cherche alors la plus petite solution positive. La solution n est telle que $n - n_1$ est divisible par $187 \times 6 = 1122$. On effectue la division euclidienne suivante :

$$-5949 = 1122 \times (-6) + 785$$

La plus petite solution est donc 785.

La fortune minimale que peut espérer le cuisinier est donc de 785 pièces d'or !