Révision du 03 juin 2020

EXERCICE 1

Partie A :

Soit a et b deux entiers naturels tels que $a > b$.

1) Démontrer que $\text{PGCD}(a,\ b) = \text{PGCD}(a-b,\ b)$.
2) En utilisant l'égalité précédente, calculer $\text{PGCD}\left(4^3-1,\ 4^2-1\right)$.
3) Compléter l'algorithme de telle sorte qu'après exécution, la variable A contienne $\text{PGCD}\left(4^3-1,\ 4^2-1\right)$.

Entrées et initialisation
  $4^3-1 \to A$
  $4^2-1 \to B$
Traitement
  tant que ...... **faire**
    si $A > B$ **alors**
      $\cdots \to A$
    sinon
      $\cdots \to B$
    fin
  fin
Sorties : Afficher A

Partie B :

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 0,\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n \end{cases}$.

On admettra que si $n \in \mathbb{N}^*$ alors, $u_n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbf{V}_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1) Justifier que pour $n \in \mathbb{N}$: $\mathbf{V}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{V}_n$ où $\mathbf{A}$ est une matrice carrée d'ordre 2 dont on précisera les coefficients.
2) On pose $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   a) Justifier que $\mathbf{P}$ est inversible et donner $\mathbf{P}^{-1}$.
   b) Vérifier que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ est la matrice diagonale $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.
3) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $\mathbf{A}^n = \mathbf{P}\mathbf{D}^n\mathbf{P}^{-1}$.
4) Soit un entier naturel n non nul. Calculer les coefficients de la matrice $\mathbf{A}^n$.
5) On admettra que pour tout entier naturel n non nul, $\mathbf{V}_n = \mathbf{A}^n\mathbf{V}_0$.

   Justifier que pour tout entier naturel n, $u_n = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} \times 4^n$.
6) a) Vérifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 4u_n + 1$.
   b) En déduire $\text{PGCD}(u_{n+1},\ u_n)$ pour tout entier naturel n.
   c) Déterminer pour tout entier naturel n, $\text{PGCD}\left(4^{n+1}-1,\ 4^n-1\right)$.